トポロジー入門演習第9回 (第2回小テスト) ('17年12月11日)

学籍番号 班 氏名

問題 9-1. (内部・閉包)

1. A, B を位相空間 X の部分集合とし、$A \subset B$ とし、以下を証明せよ。

   (1) $A^\circ \subset B^\circ$

   (2) $\bar{A} \subset \bar{B}$

2. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ を X, Y の位相とする。写像 $f : X \to Y$ に対し、以下を証明せよ。

$$\forall A \subset Y, f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A)^\circ \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X)$$

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

問題 9-2. (基本近傍系と連続性・商写像・商位相)

1. $\mathcal{N}^*(x)$ を x の基本近傍系とする。写像 $f : X \to Y$ に対して、

$$f \text{ が } x \text{ で連続である} \Leftrightarrow x \in X \text{ に対して、} {}^{\forall}V \in \mathcal{N}^*(f(x)) \text{ に対して、}$$
$$ {}^{\exists}U \in \mathcal{N}^*(x) \text{ s.t. } f(U) \subset V$$

を下のように証明をした。以下の空欄に必要十分な言葉をうめよ。ただし、f が x で連続である定義は、近傍 $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ に対して $U \in \mathcal{N}(x)$ が存在して、$f(U) \subset V$ となることとする。

(証明) ($\Rightarrow$) f は x で連続であるから、$x \in X$ に対して、$\forall V \in$ $\boxed{\text{(a)}}$ に対して、ある $U' \in$ $\boxed{\text{(b)}}$ が存在し、$\boxed{\text{(c)}}$ となる。$\mathcal{N}^*(\boxed{\text{(d)}})$ は $\mathcal{N}(\boxed{\text{(d)}})$ の基本近傍系であることから、$U \in$ $\boxed{\text{(e)}}$ が存在し、$U \subset U'$ となる。ゆえに、$f(U) \subset V$ となる。

($\Leftarrow$) $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ をとる。$\mathcal{N}^*(\boxed{\text{(f)}})$ は $\mathcal{N}(\boxed{\text{(f)}})$ の基本近傍系であることから、$V' \in$ $\boxed{\text{(g)}}$ が存在し、$\boxed{\text{(h)}}$ となる。また、仮定から、$U \in$ $\boxed{\text{(i)}}$ が存在し、$f(U) \subset$ $\boxed{\text{(j)}}$ $\subset V$ を満たす。ゆえに連続性がいえた。

2. **連続、**全射かつ開写像であるなら商写像であることを示せ。