トポロジー入門演習第16回 (第4回小テスト) ('18年2月5日)

学籍番号　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

問題 16-1. (連結・コンパクト)
以下を示せ。

1. $f : X \to Y$ を連続写像とする。$A \subset X$ が連結であれば、$f(A)$ も連結であることを示せ。

2. $a < b$ なる実数において、閉区間 $[a, b]$ がコンパクトであることを示すか、以下の項目を全て証明せよ。ただし、有界閉集合がコンパクトという定理は用いない。

   (1) $[a, b]$ がコンパクトでないとすると、$[a, b]$ のある開被覆 $\mathcal{U}$ が存在して以下を満たすことを示す。

   $$[a, \frac{a+b}{2}] \text{ と } [\frac{a+b}{2}, b] \text{ のうちどちらかは } \mathcal{U} \text{ の有限部分被覆をもたない。}$$

   (2) $a_1 = a$ かつ $b_1 = b$ とする。$[a_{i+1}, b_{i+1}]$ を $[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}]$ と $[\frac{a_i + b_i}{2}, b_i]$ のうちどちらかは $\mathcal{U}$ の有限部分被覆をもたない。

   (3) $a_i, b_i, b_i - a_i$ は収束することを示す。(ヒント：それぞれの数列が有界で単調であることを示し、「有界な単調数列は収束する」を使え。)

   (4) a_i, b_i が収束する先を c とした時に、c を含む $\mathcal{U}$ の開集合 U に対して、ある i が存在して、$c \in [a_i, b_i] \subset U$ となり矛盾する。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

問題 16-2. (開基)

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して次の同値性を示せ。

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $(X, \mathcal{O})$ の開基であること、つまり $\forall U \in \mathcal{O}$ に対して $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ が存在して、$U = \cup_{V \in \mathcal{B}'} V$ であること。

2. $\forall U \in \mathcal{O}$ と $\forall x \in U$ に対して $\exists V \in \mathcal{B}$ が存在して、$x \in V \subset U$ となる。

2⇒1 の証明に際して $\mathcal{B}'$ の集合を明確に定義すること。また、そのとき $U = \cup_{V \in \mathcal{B}'} V$ が成り立つことを証明すること。