

# トポロジー入門演習第10回 ('17年12月18日)

(積位相)

学籍番号

班 氏名

---

## 課題 10-1. (無限積位相)

1.  $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  上の積位相の開基を求めよ。
2.  $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  の箱型積位相の開基を求めよ。
3.  $(0, 1)^{\mathbb{N}}$  は、 $X$  上の積位相において開集合ではないことを示せ。

**課題 10-2.** (ゾルゲンフライ直線の第二可算公理の不成立)

ゾルゲンフライ直線  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$  が第二可算公理を満たさないことを以下のようにして示せ。

1.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$  が第二可算公理を満たさないことは、何を仮定して矛盾を導けば良いか？
2.  $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_S)$  の開基の集合を  $\mathcal{B}$  とする。  $A$  を  $\mathbb{R}$  の非可算集合とする。このとき、  $a \in A$  に対して、  $a$  に対して  $b$  は任意にとることで、  $I_a = [a, b)$  となる形の空ではない開集合全体を  $\mathcal{A}$  とする。このとき、  $I_a$  と  $I_{a'}$  に対して、  $I_a$  と  $I_{a'}$  を形作る開基の元  $B_a, B_{a'}$  で、  $a \neq a'$  なら  $B_a \neq B_{a'}$  となるものが存在することを示せ。
3.  $\{B_a | a \in A\}$  は非可算集合であることを示せ。

**課題 10-3.** (距離空間の分離公理)

$(X, d)$  を距離空間とし、その距離から作られる距離位相空間を  $\mathcal{O}_d$  とする。このとき、以下の問題に答えよ。

1. 距離位相空間  $(X, \mathcal{O}_d)$  は、ハウスドルフ空間であることを示せ。
2. 距離位相空間  $(X, \mathcal{O}_d)$  は、正則空間であることを示せ。
3. 距離位相空間  $(X, \mathcal{O}_d)$  は、正規空間であることを示せ。

**課題 10-4.** (ハウスドルフ空間)

1.  $(X, \mathcal{O})$  がハウスドルフ空間であることと、対角線集合  $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$  が閉集合であることは同値であることを示せ。
2.  $\{X_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$  が添字づけられたハウスドルフ空間の空間族とする。このとき、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  はハウスドルフ空間であることを示せ。
3. 有限集合上の位相が  $T_1$ -空間であれば、離散空間であることを示せ。