トポロジー入門円周第11回 ('17年12月25日)

(とある平面と演習のトポロジー)

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

$\boxed{\textbf{課題 11-1.}}$ (ゾルゲンフライ平面)

花子さんは、クリスマスの日、ゾルゲンフライ平面 ($\mathcal{B} = \{[a,b) \times [c,d) | a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ を開基とする $\mathbb{R}^2$ 上の位相 $\mathcal{O}$) が以下の性質を満たすことを証明したので、その証明を振る舞おうと証明文をお皿にのせて運んでいたところ、つまづいて床にこぼしてしまいました (裏面参照)。泣いている花子さんのために、うまく証明となるように並べかえてあげてください。また、四角に入っていた式はどこかに行ってしまいました。それも自分で補ってください。

1. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第一可算公理を満たす。
2. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は相対位相として、非可算空間上の離散位相を含む。
3. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第二可算公理を満たさない。

(t$_2$) このとき、$B_d(\mathbf{z},\delta) \subset B_d(\mathbf{x},1/n)$ が成り立つ。

(r$_2$) $\mathbb{R}^2$ の A での相対位相 $\mathcal{O}|_A$ での開基は、$\mathcal{B}|_A$ であるが、これは非可算離散位相であることから、

(a) $\forall \mathbf{z} = (z_1, z_2) \in B_d(\mathbf{x}, 1/n)$ とする。

(s$_1$) $[z_1, z_1 + \delta/\sqrt{2}) \times [z_2, z_2 + \delta/\sqrt{2}) \subset B_d(\mathbf{z},\delta) \subset B_d(\mathbf{x},1/n)$。

(i) ゆえに、$B_d(\mathbf{x},1/n)$ は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ での開集合である。これはいくらでも小さくできるのでこれらが可算個の基本近傍基である。

(!) $\forall \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ をとる。

(l) $V = \cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ $(V_\lambda \in \mathcal{B})$ とすると、

(h) $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in A$ に対して、$A \cap [x_1, x_1 + \epsilon) \times [x_2, x_2 + \epsilon) = (x_1, x_2)$ であるので、$(x_1, x_2) \in \mathcal{O}|_A$ である。

(m$_1$) よって、$(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第二可算空間ではない。

(y) S を $\mathbb{R}^2$ の任意の部分集合とする。

(s$_2$) 任意の $\epsilon > 0$ と自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$B_d(\mathbf{x},1/n)$ が、この位相において開集合であることが示す。

(e) これは、$(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ は第二可算空間であることに矛盾する。

(o$_1$) 特に、$\mathcal{B}$ が可算個であれば、$\mathcal{B}|_S$ は高々可算である。

(o$_3$) なぜなら、$U \in \mathcal{O}|_S$ のとき、$U = V \cap S$ かつ $V \in \mathcal{O}$ である。

(m$_2$) $\delta = \min\{d(\mathbf{z},\mathbf{x}), 1/n - d(\mathbf{z},\mathbf{x})\}$ とする。d はユークリッド距離とする。

(r$_3$) $\mathbb{R}^2$ の $\boxed{} = 0$ を満たす部分集合を A とする。

(t$_1$) 今、$(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ が第二可算公理をみたすとする。

(o$_2$) $U = \cup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \cap S = \cup_{\lambda\in\Lambda}(V_\lambda \cap S)$ より S は $\mathcal{B}|_S$ を開基とする位相空間である。

(c) ゆえに、A は非可算離散位相である。

(y$_1$) $\mathcal{B}$ を可算個の開基とする。

(g) $(S, \mathcal{O}|_S)$ は $\mathcal{B}|_S = \{B \cap S | B \in \mathcal{B}\}$ の開基とする位相空間である。

(r$_1$) その開基 $\mathcal{B}|_A$ は可算個にはなりえない。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 11-2. (円周上の位相)

$\mathbb{S}^1$ を $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\}$ として定義する。$\mathbb{S}^1$ 上に、$\mathbb{R}^2$ の通常の距離位相の相対位相を $\mathcal{O}_1$ とする。また、$\mathbb{S}^1$ を $\mathbb{R}$ のユークリッド距離位相からの全射 $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ $(\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta))$ により、$\mathbb{S}^1$ に商位相 $\mathcal{O}_2$ を入れておく。$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であることを示せ。