トポロジー入門演習第12回 ('18年1月9日)

(空間の部分集合を開集合で分離せよ！)

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

$\boxed{\textbf{課題 12-1.}}$ (ハウスドルフ空間)

以下の問題を示せ。

1. X, Y がハウスドルフ空間であれば、$X \times Y$ もハウスドルフ空間であることを示せ。また、任意の直積集合はハウスドルフ空間であることを示せ。
2. X がハウスドルフ空間であれば、$A \subset X$ もハウスドルフ空間であることを示せ。
3. 距離空間はハウスドルフ空間であることを示せ。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 12-2. (T_4 空間)

X が T_4 空間であることと、以下が同値であることを示せ。

$\forall F$、$\forall U$ をそれぞれ閉集合、開集合とする。もし、$F \subset U$ であるなら、ある開集合 V が存在して、

$$F \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

となる。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　班　　氏名

$\boxed{\textbf{課題 12-3.}}$ (T_3 空間)
位相空間が T_3 空間であることの必要十分条件は、閉近傍全体が基本近傍系になることが必要十分であることを示せ。つまり、$\forall x \in X$ と $x \in U \in N(x)$ に対して、ある閉近傍 V が存在して、$x \in V \subset U$ を満たす。

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　班　　　氏名

課題 12-4. (ゾルゲンフライ直線の正規性)

以下の手順に沿ってゾルゲンフライ直線 $\mathbb{R}_S$ が正規であることを示せ。

1. F, G を $\mathbb{R}_S$ の任意の閉集合で、$F \cap G = \emptyset$ とする。$\forall p, \in F, \forall q \in G$ とする。このとき、x_p, y_q が存在し、空ではない $[p, x_p), [q, y_q)$ で、$[p, x_p) \cap G = \emptyset$ かつ $[q, y_q) \cap F = \emptyset$ であることを示せ。(ヒント F, G が閉集合であることを使え。)
2. $U_F = \cup_{p \in F}[p, x_p)$ と $U_G = \cup_{q \in G}[q, y_q)$ が $\mathbb{R}_S$ の開集合であることを示せ。
3. $U_F \cap U_G = \emptyset$ であることを示せ。