

# トポロジー入門演習第14回 ('18年1月22日)

(コンパクトにしよう!)

学籍番号

班 氏名

---

## 課題 14-1. (コンパクト化)

1.  $(X, \mathcal{O})$  を位相空間とすると、 $X$  の一点コンパクト化  $\alpha X$  はコンパクト空間であることを示せ。
2. ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ。

**課題 14-2.** (等化空間として、 $(0, 1)$  のコンパクト化としての  $\mathbb{S}^1$ )

$[0, 1]$  から、 $\mathbb{S}^1$  への連続写像  $f$  を  $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  と定義する。 $\mathbb{S}^1$  上の位相は  $\mathbb{R}^2$  の相対位相としておく。 $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]/\{0, 1\}$  を  $0, 1$  にのみ関係をいれて得られる商集合  $[0, 1]/\{0, 1\}$  への自然な全射とする。この  $h$  によって得られる商空間  $[0, 1]/\{0, 1\}$  のことを、 $[0, 1]$  の  $0, 1$  を同一視して得られる等化空間という。位相空間  $[0, 1]/\{0, 1\}$  は、 $\mathbb{S}^1$  と同相であることを次のようにして示せ。

1. 全射  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]/\{0, 1\}$  によって得られる商空間に対して全単射、 $g : [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  が存在し、 $g \circ h = f$  であることを示せ。
2.  $g$  は連続であることを示せ。
3.  $[0, 1]/\{0, 1\}$  はコンパクトであることを示せ。
4.  $\mathbb{S}^1$  はハウスドルフであることを示せ。
5.  $\mathbb{S}^1$  と  $[0, 1]/\{0, 1\}$  は同相であることを示せ。
6.  $\mathbb{S}^1$  は  $(0, 1)$  の一点コンパクト化であることを示せ。