トポロジー入門演習 (第 2 回)

担当：丹下 基生

研究室 B715

10/10/2017

先週やったこと

- 集合の基礎
- ベルンシュタインの定理
- イプシロンデルタ論法
- 距離空間

集合・写像の基礎

- x が集合 S に含まれていることを、
$$x \in S$$
と書く。そのような x のことを S の元という。
- 集合 S のすべての元が集合 T に含まれていることを S が T の部分集合であるといい、
$$S \subset T$$
と書く。($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x \in S \Rightarrow x \in T)$)
- S, T が集合であるとして、集合として $S = T$ であることは、
$$S \subset T \text{ かつ } T \subset S$$
として定義される。

- A の元であり、かつ B の元である集合を $A \cap B$ とかく。つまり、
$$A \cap B = \{a | a \in A \wedge a \in B\}$$
- A の元であるか、B の元である集合を $A \cup B$ とかく。つまり、
$$A \cup B = \{a | a \in A \vee a \in B\}$$
- $f : A \to B$ が写像であるとは、
任意の $a \in A$ に対して、ただ１つ $f(a)$ を与える対応のこと。
- $A' \subset A$、$B' \subset B$ に対して、A' の像を
$$f(A') = \{f(a) | a \in A'\}$$
とかき、逆像を
$$f^{-1}(B') = \{a | f(a) \in B'\}$$
とかく。

- $f : A \to B$ が単射であるとは、$\forall a, a' \in A$ に対して、

$$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$$

が成り立つことをいう。対偶を取れば、

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

が成り立つ。

- $f : A \to B$ が全射であるとは、$\forall b \in B$ に対して、

$$\exists a \in A \text{ s.t. } f(a) = b$$

が成り立つ。

課題 1-1

1. $35 \ \square \ \mathbb{R}$
2. $(\cos\theta, \sin\theta) \ \square \ \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$
3. $\mathbb{N} \ \square \ \mathbb{R}$
4. $3x + x^2 \ \square \ \mathbb{R}[x]$
5. $\{1, 2\} \ \square \ \mathbb{N}$
6. $(3n + 1) \ \square \ \{(x_n) | x_{n+1} - x_n = 3\}$
7. $\emptyset \ \square \ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

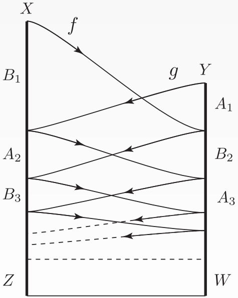
$\{1\} \ \square \ \mathbb{N}$

はどうなるでしょうか？

ベルンシュタインの定理

定理 1 (ベルンシュタインの定理)

集合 A, B に対して、単射 $A \to B$ かつ $B \to A$ が存在するとき、全単射 $A \to B$ も存在する。



$Z \to W$ はどうして全単射であるだろうか？

全単射 $Z \to W$ の作り方

$f : Z \to W$ は全単射になってないか？

$$f : Z \to W$$

(定義域を Z に制限した写像も f と書こう。)
が写像であること。
$(\because)$ もし、$f(z) \notin W$ であるとすると、
$f(z) \in \sqcup_{j=1}^{\infty}(A_{2n+1} \cup B_{2n})$ である。f が単射であることから、
$z \notin Z$ である。これは矛盾。よって、$\forall z \in Z$ に対して
$f(z) \in W$ である。f は元々単射なので、$f : Z \to W$ も単射である。f が全射であること。
f が全射でないとする。このとき、$\exists w \in W$ かつ $w \notin f(Z)$ である。$w = f(z')$ とすると、$z' \in A_{2n} \cup B_{2n-1}$。しかし、これは W の定義に矛盾する。

課題 1-2

集合 A, B に対して、単射 $A \to B$ と $B \to A$ が存在したとすると、全単射 $A \to B$ が存在する。

1. この定理を用いて、$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{N}$ に全単射が存在することを示せ。具体的に作るのではなく、お互いの集合の間に簡単な単射を構成せよ。
2. $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{N}$ の間に全単射を構成せよ。
3. 閉区間 $[0, 1]$ と $\mathbb{R}$ の間に全単射を構成せよ。

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{N}$ の間の全単射

$\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$(単射) を作れ。

$\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$(単射) を作れ。

$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{N}$ の間の全単射

$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$(全単射) を作れ。

$[0,1]$ と $\mathbb{R}$ の間の全単射

まずは、$\mathbb{R} \to (0,1)$ の全単射を構成せよ。
$y = \tan \frac{2}{\pi} x$ **は、$(-1,1)$ から $\mathbb{R}$ への全単射を与えている。**
$[-1,1]$ **と** $[0,1]$ **の間の全単射を与えよ。(平行移動と定数倍。)**

$$(-1,1) \approx \mathbb{R}$$

$$[-1,1] \approx [0,1]$$

残った部分は、

$$(-1,1) \approx [-1,1]$$

である。この部分はどうするか？

課題 1-3

$y = x^2$ が各点 x で連続であることを示せ。
(証明)
$x = \forall a \in \mathbb{R}$ に対して、$x = a$ で $y = x^2$ が連続であることを示せ。
$\epsilon > 0$ を任意にとる。$|x - a| \leq \delta$ に対して、

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| \leq \epsilon$$

であるようにすればよい。

$$|x^2 - a^2| = |(x - a)^2 + 2a(x - a)| \leq |x - a|^2 + 2|a||x - a|$$

この右辺をなんとか δ を小さくして、ϵ 以内にすればよい。
(この場合 a は固定された実数と考えよ。)

余裕のある学生は ϵ, δ をどのように選んだかじっくり考えてみよ。
一般の位相空間での連続性の定義がすんなり受け入れられるはずである。

距離空間と距離関数

X を集合とし、その上の距離関数とは、

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

で、以下を満たすものである。

1. $d(x, y) \geq 0$ かつ、$d(x, y) = 0$ なら $x = y$ である。
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

定理 2

上のような、X 上の距離関数 d が存在するとき、(X, d) は距離空間であるという。

(X, d) が距離空間かどうかは、上の３条件が成り立つことを確かめればよい。

以下の問題に答えよ。

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ 上の、(x_1,y_1) と (x_2,y_2) に対して、
$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + |y_1-y_2|$$
と定めたとき、$(\mathbb{R}^2,d)$ が X 上の距離空間となることを示せ。
2. d をある距離空間 (X,d) 上の距離関数とする。$A\subset X$ を任意の部分集合とする。$d(x,A) = \inf\{d(x,a)|a\in A\}$ と定めるとき、$|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ を証明せよ。
3. $f:X\to\mathbb{R}$ を $f(x)=d(x,A)$ と定める。このとき、$f(x)$ は連続であることを示せ。

距離空間上の連続関数

定義 1

$X \to \mathbb{R}$ が連続関数であるとは、任意の $a \in X$ に対して、$\epsilon > 0$ に対して、ある δ が存在して、

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が満たされることである。

対角線論法

$$\mathbb{R} \approx \mathbb{N}$$

であるとする。$\mathbb{R}$ と $(0,1)$ は全単射であったから、$(0,1) \approx \mathbb{N}$ が作れることと同値である。
このとき、$a_1, a_2, \cdots$ をその番号づけだとする。さらに、その実数を小数展開しておく。

$$a_1 = 0.a_1^1 a_1^2 \cdots$$

$$a_2 = 0.a_2^1 a_2^2 \cdots$$

$$\vdots$$

とする。このとき、$\{1, 2, 3 \cdots, 8\} \ni b^i \neq a_i^i$ とする。

$$b = 0.b^1 b^2 \cdots$$

として小数展開をしたものを考える。この実数も、$(0, 1)$ に含まれるので、上の列のどこかに含まれるはずである。しかし、$b \neq a_i$ である。

べき集合

定義 2 (べき集合)

X を集合とする。
$\mathcal{P}(X)$ を X の部分集合全体の集合とし、それをべき集合という。

必ず
$\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ である。