トポロジー入門演習 (第 3 回)

担当：丹下 基生

研究室 B715

10/16/2017

先々週の復習

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

ならば、

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$$

はなぜか？このように答えれば良い。

$$d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

ならば、$d(x,A) - d(x,y)$ は、$W = \{d(y,z) | z \in\}$ の下界である。W の下限は、下界の最大値であるから、

$$d(x,A) - d(x,y) \leq \inf(W) = d(y,A)$$

となる。

注意点

数学の証明は、数字や数式の羅列のことではありません！
必ず、数式の前と後ろには、

- なぜ、この計算をし、
- この計算で、何が言えたのか？

を説明をすることを心がけたい。

先週やったこと

- 対角線論法
- べき集合
- 位相の定義
- 距離空間からくる距離位相空間

対角線論法

$\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ には全単射は存在しないことを証明するための方法。

- 背理法を行う。
- 実数を 1 列に並べておく。(展開をしておく)
- その各実数の"特徴" と異なるものを構成する。
- 矛盾が引き出される。

べき集合

X 集合

- $\mathcal{P}(X) = \{A | A \subset X\}$
- かならず、$\emptyset, X \in \mathcal{P}(X)$ である。
- X が有限点集合の場合、

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#(X)}$$

どうしてか？写像 $X \to \{0,1\}$ を使って説明できただろうか？

$$A \subset X \leftrightarrow f : X \to \{0,1\} (f^{-1}(1) = A)$$

位相の定義

集合 X に位相 $\mathcal{O}$ をいれよう。 $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $O_1, \cdots, O_n \Rightarrow O_1 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{O}$
- $\{O_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \Rightarrow \cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

位相の例

- $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ としてとったものを離散位相という。
- $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ としてとったものを密着位相という。
- これらが位相の定義を満たすことは少し考えればほぼ明らかである。
- 距離空間 (X, d) に対して、 $\mathcal{O}_d = \{O | \forall x \in O, \exists \epsilon > 0, \text{ s.t. } B_d(x, \epsilon) \subset O\}$ としてとったものを距離位相という。

課題 2-1,2-2

課題 2-1

1. 対角線論法により、$\mathbb{R}$ と $\mathbb{N}$ が対等でないことがわかる。同じようにして、$\mathbb{N}$ と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は濃度が異なることを示せ。

課題 2-2. 以下の問題を解け。

1. 位相空間の最初の例として集合 X 上に構築される両極端な位相、離散位相と密着位相がある。それぞれを調べて定義せよ。
2. ２点集合 $X = \{0, 1\}$ 上の位相 $\mathcal{O}$ はどれほど存在するか？確かめよ。離散位相、密着位相以外の位相が存在するか？
3. ３点集合上に存在する、密着位相、離散位相のどちらでもない位相を１つ構築せよ。

課題 2-3

説明 2-4. では、距離空間 (X, d) から、位相 $\mathcal{O}_d$ を構成したが、本当にこれは位相になっているだろうか？$\mathcal{O}_d$ が以下の性質を満たすことを確認せよ。

1. $\mathcal{O}_d$ には、空集合と X 自身がなぜ含まれているか？
2. $\mathcal{O}_d$ の中から任意に有限個だけ集合を取り出し、その共通集合が再び開集合となるのはなぜか？
3. $\mathcal{O}_d$ の中から任意個の集合を取り出し、その和集合が再び開集合となるのはなぜか？

課題 2-4

以下の問題に答えよ。ただし、開区間 (および閉区間) とは、$(a, b) = \{x | a < x < b\}$（および $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$）の形の $\mathbb{R}$ 上の部分集合とする。

1. $X = \mathbb{R}^2$ とする。$\forall x \in X$ に対して、$B_d(x, \epsilon)$ が開集合であることを証明せよ。
2. $X = \mathbb{R}^2$ とし、

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_M((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

によって得られる位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ と $(X, \mathcal{O}_{d_M})$ は同値であることを示せ。

1. 実数直線の部分集合の話として以下の問題を解き、一般に $\mathcal{O}$ の元を開集合と呼ぶ理由を考えよ。(位相の条件の 2 つ目と 3 つ目。)
    1. １点を共有する無限個の開区間の和集合は再び開区間であることを示せ。
    2. １点を共有する無限個の閉区間の共通集合は閉区間もしくは１点であることを示せ。
    3. 無限個の開区間の共通集合が閉区間となる場合があることを示せ。
    4. 無限個の閉区間の和集合が開区間となる場合があることを示せ。