トポロジー入門演習 (第 7 回)

担当：丹下 基生

研究室 B715

11/20/2017

問題 6-1 の解説

問題 6-1

距離位相 $\mathcal{O}_d$ が位相の性質を満たすことを以下の手順に沿って示せ。

1. 空集合と X は $\mathcal{O}_d$ の開集合である。
2. $\mathcal{O}_d$ の任意の有限個の集合を取り出し、その共通集合は開集合である。
3. $\mathcal{O}_d$ の中から任意個の集合を取り出し、その和集合は開集合である。

1. のこたえ

$U \in \mathcal{O}_d$
$\Leftrightarrow \forall x \in U$ に対して $\exists \epsilon > 0$,s.t., $B_d(x, \epsilon) \subset U$ を満たす。

もし、$x \in X$ が取れれば、成り立つ命題なので、元が取れなければ、無条件に成り立つので、$\emptyset \in \mathcal{O}_d$ である。$\forall x \in X$ に対して、$B_d(x, \epsilon) \subset X$ なので、$X \in \mathcal{O}_d$ である。

2. のこたえ

$U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{O}_d$ とすると、
$\forall x \in U_1 \cap \cdots \cap U_k$ に対して、$\mathcal{O}_d$ の定義から、$\epsilon_i > 0$ が存在して、$B_d(x, \epsilon_i) \subset U_i$ である。
$\epsilon = \min\{\epsilon_i | i = 1, \cdots, k\}$ とすると、
$B_d(x, \epsilon) \subset B_d(x, \epsilon_i)$ であり、
$B_d(x, \epsilon) \subset \cap_{i=1}^k B_d(x, \epsilon_i)$ である。
ゆえに

$$B_d(x, \epsilon) \subset \cap_{i=1}^k U_i$$

が成り立ち、

$$U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{O}_d$$

である。

3. のこたえ.

任意個の開集合を

$$\{U_\lambda \in \mathcal{O} | \lambda \in \Lambda\}$$

とする。このとき
$\forall x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ **に対して、** $\lambda_0 \in \Lambda$ **が存在して** $x \in U_{\lambda_0}$ **となる。**
ゆえに、距離位相の定義より、 $\epsilon > 0$ **が存在して、**
$x \in B_d(x, \epsilon) \subset U_{\lambda_0}$ **となる。ゆえに、**

$$x \in B_d(x, \epsilon) \subset U_{\lambda_0} \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

となる。これは、 $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ **であることを意味している。**

問題 6-2 の解説

問題 6-2

以下を示せ。

1. $(X = \mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ を通常の距離位相とすると、任意の 1 点集合は閉集合であることを示せ。
2. $(X = \mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ を通常の距離位相とすると、任意の 1 点集合の内部、閉包、境界、外部がどのような集合か？証明せよ。
3. $(X, \mathcal{O})$ が離散位相空間の場合、任意の 1 点集合の内部、閉包、境界、外部はどのような集合か何か答え、証明せよ。

位相の性質を満たすことを示すのであって、位相なのだから明らかとするのは問題外。

1. のこたえ

1. ($X \setminus \{x\}$ が開集合であることを示す方針)
$\forall x \in X$ とする。$\{x\}^c = X \setminus \{x\}$ が開集合であることを示す。
$\forall y \in \{x\}^c$ に対して、ある ϵ に対して、

$$y \in B_d(y, \epsilon) \subset \{x\}^c$$

であることを示せばよい。
$\epsilon = d(x, y)$ とすると、$x \notin B_d(y, \epsilon)$ であるので、

$$B_d(y, \epsilon) \subset \{x\}^c$$

である。

2. のこたえ

2.
$\forall x \in X = \mathbb{R}^2$ とする。$\{x\}$ に包まれるような最大の開集合を U とする。$x \in U$ とする。$\exists \epsilon$ に対して、$B_d(x, \epsilon) \subset U$ となる。$x + (0, \frac{\epsilon}{2}) \in B_d(x, \epsilon)$ であり、$x + (0, \frac{\epsilon}{2}) \neq x$ であるので、矛盾する。よって、$\forall x \notin U$ であるので、U は空集合である。よって、$\{x\}^\circ = \emptyset$。
1. のことから、$\{x\}$ は閉集合であるから、$\overline{\{x\}} = \{x\}$ である。また、$\partial\{x\} = \overline{\{x\}} \setminus \{x\}^\circ = \{x\}$ である。外部は、$(X \setminus \{x\})^\circ$ である。$\{x\}$ は閉集合であるから、$X \setminus \{x\}$ は開集合である。よって、$(X \setminus \{x\})^\circ = X \setminus \{x\}$ である。

3. のこたえ

X を離散位相とするなら、任意の 1 点集合 $\{x\}$ は開集合であり、$X \setminus \{x\}$ も開集合である。よって、$\forall\{x\}$ は開かつ閉集合である。ゆえに、$\{x\}^\circ = \{x\}$ かつ $\overline{\{x\}} = \{x\}$ である。$\partial\{x\} = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$ である。また、上に書いたことから、$\{x\}$ の外部は、$(X \setminus \{x\})^\circ = X \setminus \{x\}$ である。

第 5 回

1 班

5-1	5-2	5-3	5-4

2 班

5-1	5-2	5-3	5-4
○	○	△	

3 班

5-1	5-2	5-3	5-4

4 班

5-1	5-2	5-3	5-4

5 班

5-1	5-2	5-3	5-4