トポロジー入門演習 (第 9 回)

担当：丹下 基生

研究室 B715

12/11/2017

小テスト

問題 9-1(内部・閉包)

1. A, B を位相空間 X の部分集合とし、$A \subset B$ とし、以下を証明せよ。
   1. $A^\circ \subset B^\circ$
   2. $\bar{A} \subset \bar{B}$
2. $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ を X, Y の位相とする。写像 $f : X \to Y$ に対し、以下を証明せよ。

$$\forall A \subset Y, f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A)^\circ$$
$$\Leftrightarrow (U \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X)$$

9-1-1 の解答

(1 の証明)$A \subset B$ とする。このとき、$A^\circ \subset A \subset B$ であり、B° は B に包まれる開集合の中で最大の開集合だから、$A^\circ \subset B^\circ$ である。 $\square$

(2 の証明)$A \subset B \subset \bar{B}$ である。$\bar{A}$ は、A を包む最小の閉集合であるから、$\bar{A} \subset \bar{B}$ である。 $\square$

9-1-2 の解答

$\forall A \subset Y, f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A)^\circ \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X)$

(証明)$(\Rightarrow)$ $\forall U \in \mathcal{O}_Y$ **とする。**$U^\circ = U$ **であるから、**

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(U^\circ) \subset f^{-1}(U)^\circ$$

一方、内点の定義から $f^{-1}(U)^\circ \subset f^{-1}(U)$ **なので、**

$$f^{-1}(U)^\circ = f^{-1}(U)$$

であるので、$f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ **である。**

$(\Leftarrow)$ $\forall A \subset X$ **とする。**A° **は開集合であるから、**$f^{-1}(A^\circ) \in \mathcal{O}_X$ **であり、**

$$f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A)$$

であり、$f^{-1}(A)^\circ$ **は** $f^{-1}(A)$ **に包まれる最大の開集合であるから、**

$$f^{-1}(A^\circ) \subset f^{-1}(A)^\circ \subset f^{-1}(A)$$

である。 $\square$

問題 9-2

問題 9-2(基本近傍系と連続性・商写像・商位相)

(1) $\mathcal{N}^*(x)$ を x の基本近傍系とする。写像 $f : X \to Y$ に対して、

f が x で連続である $\Leftrightarrow$ $x \in X$ に対して、${}^\forall V \in \mathcal{N}^*(f(x))$ に対して、

$${}^\exists U \in \mathcal{N}^*(x) \text{ s.t. } f(U) \subset V$$

を下のように証明をした。以下の空欄に必要十分な言葉をうめよ。ただし、f が x で連続である定義は、近傍 $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ に対して $U \in \mathcal{N}(x)$ が存在して、$f(U) \subset V$ となることとする。

(証明) ($\Rightarrow$) f は x で連続であるから、$x \in X$ に対して、$\forall V \in$ $\boxed{\text{(a)}}$ に対して、ある $U' \in$ $\boxed{\text{(b)}}$ が存在し、$\boxed{\text{(c)}}$ となる。$\mathcal{N}^*(\boxed{\text{(d)}})$ は $\mathcal{N}(\boxed{\text{(d)}})$ の基本近傍系であることから、$U \in$ $\boxed{\text{(e)}}$ が存在し、$U \subset U'$ となる。ゆえに、$f(U) \subset V$ となる。

($\Leftarrow$) $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ をとる。$\mathcal{N}^*(\boxed{\text{(f)}})$ は $\mathcal{N}(\boxed{\text{(f)}})$ の基本近傍系であることから、$V' \in$ $\boxed{\text{(g)}}$ が存在し、$\boxed{\text{(h)}}$ となる。また、仮定から、$U \in$ $\boxed{\text{(i)}}$ が存在し、$f(U) \subset$ $\boxed{\text{(j)}}$ $\subset V$ を満たす。ゆえに連続性がいえた。

9-2-1 の解答

(1) $\mathcal{N}^*(x)$ を x の基本近傍系とする。写像 $f: X \to Y$ に対して、

f が x で連続である $\Leftrightarrow$ $x \in X$ に対して、$^\forall V \in \mathcal{N}^*(f(x))$ に対して、$^\exists U \in \mathcal{N}^*(x)$ s.t. $f(U) \subset V$

を下のように証明をした。以下の空欄に必要十分な言葉をうめよ。ただし、f が x で連続である定義は、近傍 $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ に対して $U \in \mathcal{N}(x)$ が存在して、$f(U) \subset V$ となることとする。

(証明) ($\Rightarrow$) f は x で連続であるから、$x \in X$ に対して、$\forall V \in \underline{\mathcal{N}^*(f(x))}_{(a)}$ に対して、ある $U' \in \underline{\mathcal{N}(x)}_{(b)}$ が存在し、$\underline{f(U') \subset V}_{(c)}$ となる。$\mathcal{N}^*(\underline{x}_{(d)})$ は $\mathcal{N}(\underline{x}_{(d)})$ の基本近傍系であることから、$U \in \underline{\mathcal{N}^*(x)}_{(e)}$ が存在し、$U \subset U'$ となる。ゆえに、$f(U) \subset V$ となる。
($\Leftarrow$) $\forall V \in \mathcal{N}(f(x))$ をとる。$\mathcal{N}^*(\underline{f(x)}_{(f)})$ は $\mathcal{N}(\underline{f(x)}_{(f)})$ の基本近傍系であることから、$V' \in \underline{\mathcal{N}^*(f(x))}_{(g)}$ が存在し、$\underline{V' \subset V}_{(h)}$ となる。また、仮定から、$U \in \underline{\mathcal{N}^*(x)}_{(i)}$ が存在し、$f(U) \subset \underline{V'}_{(j)} \subset V$ を満たす。ゆえに連続性がいえた。

問題 9-2-2 の解答

問題 9-2-2

(2) 連続、全射かつ開写像であるなら商写像であることを示せ。

(証明) 連続写像 $f : X \to Y$ が全射かつ開写像であるとする。
f が商写像であることを示すには、

$$U \in \mathcal{O}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$$

であることを示せばよい。
($\Rightarrow$) は f が連続であることを意味する。
($\Leftarrow$) は $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ なら、f が開写像であるから、
$f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{O}_Y$ であることからわかる。

同相

同相

$f: X \to Y$ が同相であるとは以下を満たすものである。

- f が全単射である。
- f が連続で、f^{-1} も連続である。

f が連続 $\Leftrightarrow U \in \mathcal{O}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$
f^{-1} が連続 $\Leftrightarrow U \in \mathcal{O}_X \Rightarrow f(U) \in \mathcal{O}_Y$
$\Leftrightarrow f$ が開写像

連続全単射な開写像は同相写像のことである。

可算公理

第一可算

$(X, \mathcal{O})$ が第一可算であるとは、$\forall x \in X$ に対して、基本近傍基 $\mathcal{N}^*(x)$ が高々可算集合であるものが存在するときをいう。

第二可算

$(X, \mathcal{O})$ が第二可算であるとは、X の開基で、高々可算なものが存在するときをいう。

可分

$(X, \mathcal{O})$ が可分であるとは、$\bar{A} = X$ となる部分集合 $A \subset X$ で、高々可算なものが存在するときをいう。

第一可算公理

第一可算空間:

- 離散空間
- 有限集合
- $\mathbb{R}^n$ 上の通常の位相
- 距離空間
- ゾルゲンフライ直線

第二可算公理

第二可算空間

- 有限集合
- $\mathbb{R}^n$ 上の通常の位相

第二可算公理の方が厳しい条件。実際
第二可算 $\Rightarrow$ 第一可算

可分

可分位相空間

- 高々可算集合
- $\mathbb{R}^n$ 上の通常の距離位相空間

積位相空間

積位相空間

X, Y を位相空間とする。このとき、積集合 $X \times Y$ に、$\{U \times V | U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ を開基として位相を入れたものを積位相空間という。

- 積位相空間とは、$p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ を射影とするとき、射影を連続にする最小の位相をいれている。
- $\{p_1^{-1}(U), p_2^{-1}(V) | U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ によって生成された位相といってもよい。