トポロジー入門演習 (第 15 回)

担当：丹下 基生

研究室 B715

1/29/2018

小テスト

問題 14-1(開基)

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開基であること ($\forall U \in \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ が存在して、$U = \cup_{V \in \mathcal{B}'} V$) は次が成り立つことと同値であることと示せ。

$$\forall U \in \mathcal{O} \text{ と、} \forall x \in U \text{ に対して}$$

$$\exists V \in \mathcal{B} \text{ が存在して、} x \in V \subset U \text{ となる。}$$

2. $\mathbb{R}^2$ が第二可算公理を満たすことを示せ。
3. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上の積位相の開基を与えよ。

14-1 の解答

(1)$\Rightarrow$
$\forall U \in \mathcal{O}$ に対して、条件のような $U = \cup_{V\in\mathcal{B}'} V$ をとっておく。
$\forall x \in U$ に対して、$V \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ が存在するので、条件が成り立つ。
$\Leftarrow$
$\forall U \in \mathcal{O}$ に対して、$V \in \mathcal{B}$ で、$x \in V \subset U$ となる V の全体の集合を $\mathcal{B}'$ とすると、$U = \cup_{V\in\mathcal{B}'} V$ がいえる。 $\square$

(2)
$\mathcal{B} = \{B_d(x,r) | x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ が開基であることを示す。
$\forall U \in \mathcal{O}$ に対して、$\forall y \in U$ とする。$B_d(y,s) \subset U$ が存在して、$s \in \mathbb{R}$ である。$\mathbb{Q}^2$ は $\mathbb{R}^2$ において稠密であるので、十分小さい $\exists \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ が存在して $y \in B(x,\epsilon) \subset B(y,s)$ がなりたつ。ゆえに、$\mathcal{B}$ が開基である。 $\square$

14-1 の解答

トポロジー入門演習 (第 15 回)

担当：丹下基生

(3)

$\{p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_{i_n}}^{-1}(U_{\lambda_1}) | n \in \mathbb{N}, \{\lambda_1, \cdots \lambda_n\} \subset \mathbb{N}$ **かつ、**$U_{\lambda_i} \in \mathcal{O}_d\}$

$\square$

問題 14-2

問題 14-2(分離公理)

1. $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であることと、対角線集合 $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ が閉集合であることは同値であることを示せ。
2. X が T_4 空間であることと、以下が同値であることを示せ。
   $\forall F$、$\forall U$ をそれぞれ閉集合、開集合とする。もし、$F \subset U$ であるなら、ある開集合 V が存在して、
   $$F \subset V \subset \bar{V} \subset U$$
   となる。

14-2 (1) の解答

(1) $\Rightarrow$
$\forall x, y \in X$ とし、$x \neq y$ のとき、$(x, y) \in \Delta^c$、ある開集合 U, V が存在して、$x \in U$ かつ $y \in V$ かつ、$U \cap V = \emptyset$ である。最後の条件は $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ と同値である。よって、(x, y) は Δ^c の内点である。よって、Δ が X^2 において閉集合。

$\Leftarrow$
$\forall x, y \in X$ かつ、$x \neq y$ とする。このとき、Δ^c が開集合であることから、ある開集合 $U, V \in \mathcal{O}_X$ が存在して、$U \times V \subset \Delta^c$ となる。よって、これは、$(x, y) \in U \times V$ かつ、$U \cap V = \emptyset$ が成り立つ。

問題 14-2 (2) の解答

(2) $\Rightarrow$ X が T_4 空間とする。このとき、$\forall F, \forall U$ を閉集合、開集合とし、$F \subset U$ を満たすとする。このとき、F, U^c は閉集合であり、$F \cap U^c = \emptyset$ である。X は T_4 空間であることから、開集合 V, W が存在して、$F \subset V$ かつ、$U^c \subset W$ が存在して、$V \cap W = \emptyset$ である。また、W^c は V を含む閉集合であり、$\bar{V}$ はそのような閉集合の最小なので、$F \subset V \subset \bar{V} \subset W^c \subset U$ となる。

$\Leftarrow$ X が条件を満たすとする。E, F を閉集合とする。$E \subset F^c$ であり、F^c は開集合である。このとき、開集合 V が存在して、

$$E \subset V \subset \bar{V} \subset F^c$$

が成り立つ。$\bar{V}^c = W$ とおくと、$E \subset V$ かつ $F \subset W$ となり、$V \cap W = \emptyset$ である。

連結

連結

位相空間 X が連結であるとは、以下のような開集合 U_1, U_2 は存在しない ことをいう。

- $X = U_1 \cup U_2$
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
- $U_1, U_2 \neq \emptyset$

上のような U_1, U_2 が存在するならそれらは X において開かつ閉になる。

連結な部分集合

$A \subset X$ が連結な部分集合とは、A に相対位相をいれたとき、$(A, \mathcal{O}|_A)$ が連結であることをいう。つまり、下のような X の開集合 U_1, U_2 が存在しない。

1. $A = A \cap (U_1 \cup U_2) \Leftrightarrow A \subset (U_1 \cup U_2)$
2. $A \cap U_i \neq \emptyset$
3. $A \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$

性質

主な性質

- $\mathbb{R}$ は連結.$\mathbb{Q}$ は不連結
- A が連結集合なら、連続像 $f(A)$ も連結
- X と Y が同相で、X が連結なら Y も連結。
- $A \subset X$ が連結なら閉包 $\bar{A}$ も連結。
- x を含む連結集合の最大の集合を x の連結成分といい、$C(x)$ とかく。$C(x)$ は閉集合である。

とくに、$\mathbb{Q}$ は、完全不連結 (各点 $x \in X$ の連結成分 $C(x)$ が x のみである) である。

弧状連結

弧状連結

X が弧状連結であるとは、$\forall p, q \in X$ に対して、連続写像 $f : [0, 1] \to X$ が存在して、$f(0) = p$ かつ $f(1) = q$ を満たす。

弧状連結ならば連結である。
この逆は一般には成り立たない。