クラスセミナー
第3回

担当：丹下 基生

研究室 B715

10/19/2018

多変数関数の連続性

定義

$z = f(x, y)$ が (a, b) で連続であるとは、(a, b) に向かってあらゆる近づき方をしたときに、$f(a, b)$ に近づくことをいう。

あらゆる近づき方？

近づき方とは？

平面の中で、(a, b) に近づくあらゆる道を考えたらよいんじゃ？
平面上の道を $(a(t), b(t))$ とし、$a(0) = a$ と $b(b) = b$ としましょう。ここで、$a(t), b(t)$ は連続関数とします。

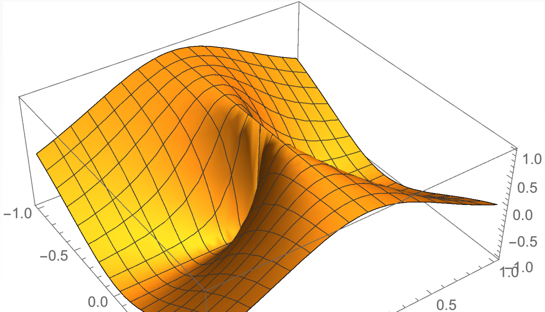
まとめ

このような任意の" 道" $(a(t), b(t))$ に対して $f(a(t), b(t))$ が 1 変数関数として、0 で連続であることが多変数関数の連続性である。

例題

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

は、$f(t,t)=0$ であり 0 に収束するが、$f(t,2t)=-3/5$ であり、0 に収束しないので連続ではない。
このような関数は、$(0,0)$ で値が決められていなくても、連続には拡張できない。



つまり近づく方法によって 2 つ以上の値を取りうる場合、どのようにも拡張できない。また、近づき方は直線だけとは限らない。
つまり、(at, bt) のような道だけ考えればよいというわけではない。例えば、

$$f(x,y) = \frac{x^4}{(x^2-y)^2+x^4}$$

とする。(at, bt) をとると、

$$f(at,bt) = \frac{a^4t^4}{(a^2t^2-bt)^2+a^4t^4} = \frac{a^4t^2}{(a^2t-b)^2+a^4t^2} \to 0 (t \to 0)$$

となるので、0 に収束するか？

(t, t^2) で近づいてみる。$f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4} = 1$ となり、0 に収束する。よって、

$$f(x, y) = \frac{x^4}{(x^2 - y)^2 + x^4}$$

は、原点がどのような値でも連続に拡張することができない。

まとめ

直線方向だけではなく、"あらゆる近づき方" で近づく必要がある。

連続でないことは、近づき方を指定してやって値が違うことを見れば良い。
じゃあ連続であることはどうするのか？

例題

次の関数が連続であることを示せ。

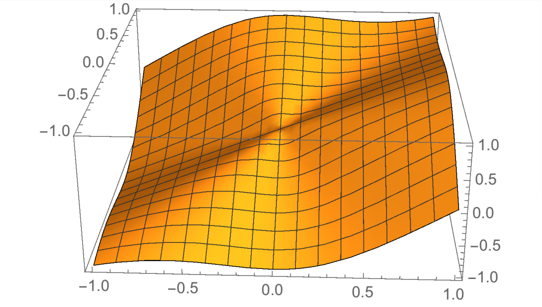
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

$\because\ (x,y)\neq(0,0)$ **では、連続関数の四則演算、ルートをとる操作で得られているので連続である。**
$(x,y)=(0,0)$ **で連続であることを示す。あらゆる近づき方をした時に、連続であればよい。あらゆる近づき方を** $(a(t),b(t))$ **とする。** $a(t),b(t)$ **は** $t=0$ **で連続な関数で、** $a(0)=b(0)=0$ **である。** $r(t)=\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}$ **とおく。ゆえに、** $r(t)\to 0(t\to 0)$ **である。**
$|f(a(t),b(t))|=|\frac{a(t)^3+b(t)^3}{r(t)^2}|\leq\frac{r(t)^3+r(t)^3}{r(t)^2}=2r(t)\to 0\ \ (t\to 0)$
となる。はさみうちの原理より、 $f(a(t),b(t))\to 0$ **となる。**

任意の近づき方によらず、$f(x,y)$ が 0 に収束することがわかった。つまり、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

よって $f(x,y)$ は原点でも連続。 □



この証明でわかる通り、道をわざわざとって見せなくても、後半で、以下のようにしてもよい。極座標をとってもよい。

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。ゆえに、$r \to 0 \quad ((x, y) \to (0, 0))$ である。$|f(x, y)| = |\frac{x^3+y^3}{r^2}| \leq \frac{r^3+r^3}{r^2} = 2r \to 0 \quad (t \to 0)$ となる。はさみうちの原理より、$f(x, y) \to 0$ となる。 $\square$

$(x, y) = (r\cos\theta, \sin\theta)$ とすると、
$|f(x, y)| = r|\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leq r(|\cos^3\theta| + |\sin^3\theta|) = 2r \to 0$
より、$f(x, y) \to 0$ である。 $\square$

問題

この方法を真似して、以下の値を求めよ。

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \log \sin \sqrt{x^2+y^2}$

全微分可能

定義

関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であるとは、

$$f(x, y) = f(a, b) + m(x-a) + n(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$$

が成り立つような実数 m, n が存在する。

ここで、$o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$ は、ランダウの記号といい、$h(x, y) = o(g(x, y))$ であるとは、$(x, y) \to (0, 0)$ のときに、$\frac{h(x,y)}{g(x,y)} \to 0$ となることをいう。

もし、$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能であれば、$m = \frac{\partial f}{\partial x}$ かつ $n = \frac{\partial f}{\partial y}$ である。

$$f(x,y)=f(a,b)+m(x-a)+n(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$$

この式から、

$$z=f(a,b)+m(x-a)+n(y-b)$$

は、(a,b) の接平面という。全微分可能とは、接平面が存在することと同値である。実際示すときは、

$$\frac{f(x,y)-f(a,b)-m(x-a)-n(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\to 0$$

の形にしてから示す。

例題

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は原点で全微分可能か？

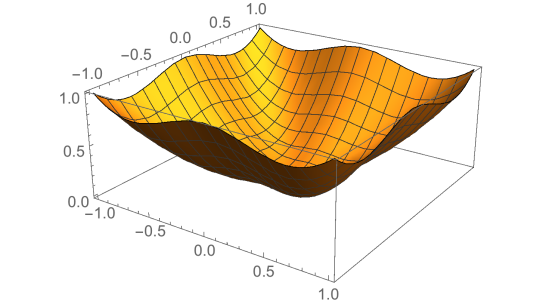
$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$ であることを示す。$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とすると、

$$\frac{|x^4+y^4|}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \leq \frac{|x^4|+|y^4|}{r^3} \leq \frac{r^4+r^4}{r^3} = 2r \to 0$$

より、$f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ である。よって、
$f(x,y) = 0 + 0(x-a) + 0(y-b) + o(\sqrt{x^2+y^2})$ となるので、
$f(x,y)$ は原点で全微分可能。

クラスセミナー

担当：丹下基生



例題

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は原点で全微分可能か？

もし全微分可能であるなら、
$m = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{df(x,0)}{dx}|_{x=0} = 1$
$n = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{df(0,y)}{dx}|_{y=0} = 1$ **となるので、**

$$\frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{xy(x+y)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

この $(x,y) \to (0,0)$ での極限値が 0 に収束すれば良いが、

道 (t,t) をとると、

$$-\frac{t^2(t+t)}{\sqrt{(t^2+t^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、矛盾する。よって、関数 $f(x,y)$ は全微分可能でない。 $\square$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は連続であるが、全微分可能ではない。

問題

この方法を真似して、以下の関数は $(0,0)$ で全微分可能かどうか判定せよ。

- $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2+x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$