

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

フレッシュマンセミナー

第2回

担当：丹下 基生

研究室 B715

4/20/2018

Today's riddle.

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

Riddle 1

Why is 6 afraid of 7?

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

学類で学ぶ授業

1年生

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

数学類の科目

- 数学基礎
- 微積分 I,II
- 微積分 I,II 演習
- 線形代数 I,II
- 線形代数 I,II 演習

2年生

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

数学類の科目

- ベクトル解析と幾何 (演習)
- 線形代数続論 (演習)
- 代数入門 (演習)
- 集合入門 (演習)
- トポロジー入門 (演習)
- 微分方程式入門 (演習)
- 計算機演習
- 関数論 (演習)
- 統計学 (演習)
- 数学外書輪講 I

3年生

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

数学類の科目

- 代数 IA
- 代数 IIA
- トポロジー A
- トポロジー B
- 多様体入門 (演習)
- 偏微分方程式入門 (演習)
- 関数解析入門 (演習)
- 曲面論 (演習)
- ルベーグ積分 (演習)
- 確率論 I,II
- 数理論理学 I,II
- 数理統計学 I,II
- 計算機数学 I,II
- 数学外書輪講 II
- 卒業予備研究

4年生

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

数学類の科目

- 代数学 II
- 代数学 III
- トポロジー C
- 微分幾何学
- 関数解析
- 複素解析
- 卒業研究

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

1年生の授業

数学基礎 (竹内 (潔) 先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 集合、論理、イプシロン・デルタ論法、連続性、写像、空間図形、関数項級数、一様収束、ユークリッド空間の位相

一年生で習う微積分で学ぶ上で本質となることところを取り出して学ぶ。理論の部分なので、計算演習などが少なく、演習は付随していない。通常ならさらっと通り過ぎるが、実は大事である事柄を凝縮させた一年生のうちで実は一番大事な授業。高校と大学のギャップを埋めるための講義といってもよい。特に、イプシロン-デルタ論法で一山ある。一応収束や、関数項級数などは、計算練習あり。

必ず予習をすることが必要である。

微積分Ⅰ(演習) 田崎先生 (金子・三原先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 連続関数、微分、テーラーの定理、積分、広義積分

一変数の微分積分を行う。関数の微分を積分計算とその理論を中心に扱う。

- ① 数列が収束するとは？
- ② 連続であるとは？
- ③ 微分可能とは？
- ④ 微分の練習 (合成関数、逆関数、)
- ⑤ 平均値の定理、テイラー展開
- ⑥ 積分 (三角関数、逆三角関数、有理関数、無理関数)
- ⑦ 広義積分 (収束、広義積分の計算など。余裕があればガンマ関数なども。)
- ⑧ ガンマ関数を用いて、 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の導出など。

線形代数Ⅰ(演習) 星野先生 (藤田、増岡先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 平面ベクトル、空間ベクトル、数ベクトル、線形結合、線形独立、線形従属、行列、基本変形、連立一次方程式、行列式、ハミルトン・ケリーの定理、余因子展開、余因子行列、線形写像

一年生のもう一つの山は線形代数。

線形代数とは、比例関係 (一次関数) の高次元化

$$y = ax \rightsquigarrow y = ax_1 + bx_2 + \cdots + cx_n$$

である。問題は、ただ一つ。

連立一次方程式を解くことである。

- どうやってとくか？
- 解くとはどういうことか？
- 連立一次方程式を行列に変換し、行列の演算を使うことで一次方程式をとく。

微積分II(演習) 竹山先生 (蓮井、桑原先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 多変数関数、偏微分、全微分、陰関数定理、重積分、累次積分、重積分の変数変換、曲面積
多変数の微積分について計算・理論を中心に行う。

- ① 多変数の連続性の定義と演習、偏微分。
- ② 全微分 (微分可能な関数を多変数関数に拡張して定義される概念、普通微分可能といってもよい。)
- ③ 合成関数の微分法 (2種類)
- ④ 2変数関数の極値問題 (2変数関数の増減表、極値、鞍点)
- ⑤ 重積分 (2変数関数とその関数で囲まれる領域の体積。)
- ⑥ (曲面積) 曲面上で積分をする。

線形代数II(演習) 星野先生 (星野、蓮井先生)

フレッシュマン
セミナー

担当: 丹下
基生

キーワード … ベクトル空間, 基底, 次元, 直和, 線形写像, 商空間, 計量ベクトル空間, 対角化, 固有値, 固有ベクトル, 半単純な線形変換

いろいろな状況でベクトルを扱おう (抽象化)。

$$a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \quad (\text{多項式})$$

$$a_0, a_1, a_2, \cdots (\text{数列})$$

抽象化がすめば、やることは「連立一次方程式をとく」こと。

- ① 直和 (ベクトル空間どうしの足し算)
- ② ベクトルの直交化 (内積を考えて直交変形する)
- ③ 線形写像 (抽象ベクトル空間における行列の積のようなもの) を実際行列の積として考えるようにすること。
- ④ 対角化 (行列 A を $P^{-1}AP$ などに変えて対角行列にすること)
- ⑤ 固有値、固有ベクトル。

1年生の授業の注意点

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

- 基本的に講義 (演習がつかないもの) と演習に分かれている。
- 線形、微積の授業の内容をその日のうちに消化していくこと。もし授業中わからなくなりそうだったら予習も効果的。
- 演習は、大抵は毎回問題を解かされる。宿題、発表、小テストなどが課される。それらを定期的にこなしていくこと。講義の内容に関して実際手を動かして問題を解いて見ることで、講義の内容が理解できるようになる。
- 数学基礎はしっかり聞いて理解すること。
- コース終了間近では単位の獲得条件について説明があるので、遅刻や欠席などはなるべくしないこと。

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

2年生の授業

代数・幾何・解析・情報・統計

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

代数

- ① 線形代数続論
- ② 代数入門

幾何

- ① ベクトル解析と幾何
- ② トポロジー入門

解析

- ① 微分方程式入門
- ② 関数論

論理・統計・情報

- ① 集合論
- ② 計算機演習
- ③ 統計学

外書輪講

ベクトル解析と幾何 (演習) 井ノ口先生 (井ノ口、永野先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … ベクトル場，スカラー場，内積，ノルム，多変数の微積分，逆関数定理，陰関数定理，曲線，弧長，線積分，グリーンの定理，ベクトル積，勾配ベクトル場，ベクトル場の回転，ベクトル場の発散，曲面，面積・体積，面積分，ストークスの定理，ガウスの定理

- 1年生の微積分の続論&幾何の初歩。
- 1年生での微積分では、多変数の関数 $f(x, y)$ や $f(x, y, z)$ だが、ここでは

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

に拡張される。この場合、2次元から3次元

- 微分 (接線) とは、関数を 1 次関数と近似すること、

$$f(x) \mapsto f'(a)x$$

$$f(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$F(x, y)$ の微分 $dF(x, y)$ とは、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

のように行列からなる。

- 微積分と線形代数の融合となる。
つまりどちらもわかっていないといけない。
- ベクトル解析 (grad, rot, div などの操作) たとえば、

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

代数入門(演習) 森田先生(金子・三河先生)

フレッシュマン
セミナー

担当: 丹下
基生

キーワード … 対称性、群、部分群、巡回群、剰余類、環、整数、素因数分解、中国剰余定理、既約多項式

- 群論の内容。
- 群とは、変換全体をあつめた集合のこと。
- 例 $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ で一対一に移す写像全体を n 次対称群といい、 S_n と書き表す。1 から n までの数字を並び替え全体の集合と一致するので、 S_n は $n!$ 個の要素からなる集合。このような集合は、線形代数でも行列式を定義するときに登場する。
- 群の性質 (準同型、剰余群、フェルマの小定理)
- 環 (整数全体と足し算掛け算を考えたものの一般化)、体 (実数、複素数などの一般化)、中国剰余定理、アイゼンシュタインの既約判定。

微積分、線形代数とは直接のつながりはないが、群論の基礎は2年生以上の数学を学ぶ上で必須事項。演習もついているのでこれらのことについて系統立てて学ぶことができる。

集合入門 (演習) 坪井先生 (塩谷先生、竹内 (耕) 先生)

フレッシュマン
セミナー

担当: 丹下
基生

キーワード … 集合, 和集合, 共通部分, 差集合, 補集合, 直積集合, 巾集合, 集合族, 写像, 像, 原像, 全射, 単射, 全単射, 合成写像, 同値関係, 商集合, 順序, 選択公理, 濃度, 可算集合, 非可算集合, 整列集合, 整列定理, ツオルンの補題

- 半期かけて集合や集合の扱い方について学ぶ。
- 集合論の講義、演習がこれほど充実しているのは筑波だけ。集合論の専門家 (塩谷先生のような) は普通の大学にはいない。
- 計算などの具体的な演習はなく、抽象的な内容。
- 冪集合、集合族、同値関係、商集合が最初の山。
- 順序、整列集合、順序数 (1 番目、2 番目、… の一般化)、整列集合の比較可能性が重要。
- ツオルンの補題 \Leftrightarrow 選択公理は、無限個の集合から元を取ることができることを保証する公理、この話題がこの授業のある意味メイン。この公理を使うと、全てのベクトル空間から基底の存在が保証される。

線形代数続論 (演習) 木村先生 (木村・三河先生)

フレッシュマン
セミナー

担当: 丹下
基生

キーワード … 行列、線形写像、ベクトル空間、ランク、(広義)固有空間、ジョルダン標準形

- この授業の目標は、ジョルダン標準形。
- 線形代数IIで対角化可能について議論したが、不可能なものについてさらに詳しく見る。(べきゼロ行列+対角行列)という形を持ち、それがジョルダン標準形に繋がる。
- 半期でこの内容は少しゆっくり進むので、1年生で理解していなかった線形代数IIをここでじっくりと復習しておこう。線形代数IIを理解している人は上の内容を進んで学ぶと良い。
- 幾何的には、2次曲面(2次形式)の分類も行う。この内容は、3年生以上で学ぶ多様体論やモース理論において知っておくと便利。
- この内容は、代数の中で、表現論やリー群、リー環論の初歩にも対応する。

トポロジー入門 (演習) 川村先生 (平山先生・丹下)

フレッシュマンセミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 距離空間・位相空間・連続写像・積空間・商空間・コンパクト性・連結性

- この授業は、群論、集合に続いて、大学の数学で初めて現れた曲者といえる。
- 集合論を基礎に、位相空間という、空間の連続性を抽象化した対象に対して学ぶ。
- 位相空間の定義から始まり、その空間に与えられる様々な性質を通して、連続性ということに関する奥深い理論を学ぶ。
- 特に、コンパクト性や分離公理はその内容のうちで大きな目標となる。
- 抽象的な議論を集合入門の時点で鍛えておけば、この内容は、全く問題なく進むであろう。
- 後期に行われるので、夏休みのうちに少しだけ助走をつけておけば、なおよい。
- そうでないと、脱落する人が多数。

微分方程式入門 (演習) 竹山先生 (桑原・守屋先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 求積法、定数係数線型常微分方程式 (系)、行列の指数関数、特殊関数

- 常微分方程式 (1 変数) の基本的な解法 (変数分離形、同次形、定数変化法など) についてしばらく学ぶ。
- 線形常微分方程式の解法
- 微分演算子を用いた計算方法には目からうろこ。
- 連立方程式の解き方など。
- 最後にフーリエ級数とその計算方法について学ぶ。
- この授業は、決まった解法を覚えてその通りに計算を実行するだけで十分で、それほど苦勞なく単位を取ることができるであろう。
- ただ、計算量が他のものより若干多い

関数論 (演習) 久保先生 (木下・カーナハン先生)

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 複素数平面，複素関数，正則関数，コーシーの積分公式・積分定理，ローラン展開，留数

- ここで関数とは、複素関数のこと。
- 複素平面から複素平面への関数で微分可能とはどういうことかを考えるとき、自然に正則関数 (微分可能な複素関数の意味) が得られる。
- 正則関数の様々な性質を学ぶ。
- 正則関数の積分は、ある曲線にそった線積分である。1年生の時に学んだ線積分の定義を復習する必要がある。
- 留数定理が後半で学ぶ大きな内容。通常の実数の積分では計算が困難だった広義積分も、複素平面上の積分と留数定理を用いて簡単に求めることができるようになる。例えば、 $\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$ などである。

計算機演習 坂井先生・照井先生

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 数式処理システム, Mathematica, 関数型プログラミング言語, Haskell

- 数式処理システム Mathematica や、プログラミング言語の初歩を学び、数学の問題（微積分や線形代数など）を解きます。
- 1D サテライト (1D301) の端末を使って実習します。
- 必要なソフトウェアはサテライトにすでに入っていますので、興味のある人は、来年の授業を待たずにぜひ使ってみてください。
- 今年は「Mathematica の立ち上げ方」の説明用動画を作りました。（説明の字幕付き）<https://goo.gl/xkZdVn> それ以降の Mathematica の使い方は、インターネットを検索するといろいろな資料が見つかると思います。
- 質問のある方はメールでどうぞ。メールアドレスはホームページにあります <https://researchmap.jp/aterui>

統計学 (演習) 小池先生 (大谷内・矢田先生)

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

キーワード … 連続変量、離散変量、度数分布表、ヒストグラム、条件付確率、事象の独立性、ベイズの定理、確率変数、積率、離散型分布、連続型分布、積率母関数標本相関係数、統計量の性質・分布、順序統計量、十分統計量、近似法則大数の法則、中心極限定理、項分布の正規近似・ポアソン近似

- データによる実証なくしては自然科学は成立しない。本講義では、データの見方・考え方について平易に解説する。
- 数理統計学の基本的な理論と概念を概説する。本講義を受講するにあたって、高校までの確率・統計の知識を仮定しないが、大学初年級で学ぶべき微分積分は、既習であることが望まれる。
- 試験・レポートなどがある。

外書輪講Ⅰ(カーナハン・守屋・永野・三河・梁・丹下・井ノ口・竹内(耕)先生)[半期+半期]

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

- ① 外国語(とりわけ英語)の数学の本を受講者全員(だいたい10人程度)で回して、学生が一人ずつ黒板の前で発表をする講義。
- ② 読む本は、教員によって、指定されていたり、候補の中から選択することができたりする。
- ③ 試験などしない先生も多いが、その分、発表の準備に十分に時間をかけて取り組む必要がある。
- ④ 内容としてはそれほど難しいものはないが、中途半端な理解では説明ができないので、進んで自分の理解を深めなければならない点が難しいが、やりがいも大きい。

2年生の授業の注意点

フレッシュマンセミナー

担当：丹下
基生

- 1年生の授業をさらに深める授業 (ベクトル解析と幾何・線形代数続論・微分方程式入門・関数論) と新しく学ぶ授業 (トポロジー入門・代数入門) が混在する。
- わからなくなった時の原因として次が挙げられる。
 - 1年生の内容の基礎ができていないから。
 - 新しく学ぶ部分 (定義など) がまだしっかりと理解されていないから。
 - そのどちらも。

どこでわからなくなったか確認し、立ちもどろう。

- 位相空間や群論などの新登場の概念は、新しいことをやっているのだから分からなくて当然。割り切って進もう。
- 1年生と同様演習の授業がついているので、必ず両方受講し双方ともに勉強を続ける必要がある。
- 3年生以降で学ぶ数学の基礎になるのでどうにか乗り切ろう！

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

3年生の授業

代数 … 代数 IA、代数 IIA

幾何 … トポロジー A、トポロジー B、多様体入門(演習)、曲面論(演習)

解析 … 偏微分方程式入門(演習)、関数解析入門(演習)、ルベーグ積分(演習)

統計 … 確率論 I,II、数理統計学 I,II

基礎 … 数理論理学 I,II

情報 … 計算機数学 I,II

その他 … 数学外書輪講 II、卒業予備研究

3年生で学ぶ授業

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

代数 IA、IIA 群論復習、単因子論、体論、代数学の基本定理、シローの定理、アーベル群の基本定理、可解群、組成列

トポロジー A,B 単体複体、ホモロジー、ホモトピー、基本群
多様体入門 (演習) 接ベクトル、写像の微分、ベクトル場、積分曲線

偏微分方程式 楕円型、放物型、双曲型偏微分方程式、熱方程式、波動方程式

関数解析入門 (演習) ヒルベルト空間、バナッハ空間 (内積の入った無限次元線形代数のこと) 主に、微分方程式を代数的に解くために開発されている。

曲面論 (演習) 曲線、曲率、捩率、曲面、ガウス曲率、平均曲率、第一基本形式、第二基本形式 (空間に埋め込まれた曲線や曲面の曲がり具合を微積分の手法を用いて調べる)

ルベーク積分 (演習) 測度、シグマ加法性、ルベークの収束定理 (測度と可測関数を定義をすることで、積分における極限操作を容易にできるようにする。)

確率論 I,II 確率空間、確率変数、分布、期待値、分散、独立性、大数の法則、中心極限定理、ポアソンの小数法則、単調族定理

数理論理学 I,II 述語論理とは何か？ゲーデルの完全性定理 (一階述語論理の完全性) を軸に、命題論理と述語論理にわけて解説、後期は公理的集合論、基数。

数理統計学 I,II 統計学における推定論 (I)、検定 (II) の基礎を学ぶ。

計算機数学 I,II 前期 (I) では実験数学，理論計算機科学の基礎を学ぶ (多項式の整除や剰余類などの代数的な題材を用いて計算機の応用)。後期 (II) では、浮動小数、誤差、ニュートン法、数値積分、差微分方程式などを用いて数値計算の基礎を学ぶ。

数学外書輪講 II (実は必須科目) 数学外書輪講 I の続編。これまでの知識を使って少し高度な外書を輪講する。教員から課題が課されることもある。

卒業予備研究 (必須科目) 研究室配属の前の予備的な研究 (学生が興味のある題材を選んで、それについて自ら本を読んできて発表、または論じる。)

卒業予備研究を終えて、多くは、そのまま卒業研究に進み、4年生の最後に、卒研発表がある。

4年生の授業

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

以下は略す。

- 代数学 II
- 代数学 III
- トポロジー C
- 微分幾何学
- 関数解析
- 複素解析
- 卒業研究

数学の問題の考え方、問題の見つけ方。

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

疑問

なぜこんなにも、数学について学ぶのか？

そもそも、数理論理学は、数学について学ぶために学んでいるようなところもある。

比較する。

物理学者の動機

自然の美しさに触れる。自然についてわかりたいと思う。

物理学は、自然のあらゆる営みを、数学を使って説明しようとする。

具体例：

古典力学 → ニュートンの運動方程式

電磁気学 → マクスウェルの方程式

量子力学 → 波動方程式

これらの微分方程式を解析していくことで、現象として理解できる。最近では、素粒子物理学などにおいてもシンプレクティック幾何や複素幾何学など現代数学の粋が用いられている。

数学者の動機

数や幾何の美しさに触れ、数や幾何についてわかりたいと思う。

研究対象は自然ではなく、数や幾何模様などの一度抽象化された対象である。

それらの中から真実を追求するために、さらに高次の抽象的な道具を用いる必要がある。

(あくまで対象は創意から発生した代物であるところが物理と違う。)

つまり数学で考える対象は数限りなくある。

物理を説明することで役に立つ数学も、独自の道を歩んでいる。

例 1：素数の出現頻度を表す ($\pi(x)$ は x までの素数の数)

$$\pi(x) \sim Li(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x} \quad (\text{素数定理})$$

自然数の中の複雑に見える素数がある一定の規則を持っていることを示す数論史上最高の結果。

例 2：曲面 Σ のガウス曲率 K とオイラー数 χ を間の関係

$$\int_{\Sigma} K d\mu = 2\pi\chi(M) \quad (\text{ガウスボンネの定理})$$

この定理は、微分幾何と位相幾何を繋ぐ本当によい定理。ガウス曲率という曲面の曲がり方の情報の中に、曲げて変わらない位相的な性質も含まれているという、ガウス曲率の偉大さともいえる。

よい定理を作ることが数学者がする最大の貢献。要は

発想力である。

そのために

- ① よい定義をすること。
- ② つまり、よい着眼をすること。

数学の定義をするということは、物理学では一つのモデルを作ることに相当する。

ある意味そこに魂を宿らせること。

“よい”とはどういうことかを考えよ。

数学類 40 人のうち毎日一人が何かの数学のアイデアを発想し、発信し続ければ、今の数学が全て入れ替わる。

考える対象はなんでも良い

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

例：フィボナッチ数 (Fibonacci: 中世イタリアの数学者)

$$F_n : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

前の2つの数字を足して次の数を作っている。

- ひまわりの種の配列の数。(写真はなし)
- オウムガイの螺旋の形。(写真はなし)
- 生まれて2ヶ月後につがいを生むよううさぎの夫婦が n 日後に繁殖させたうさぎの総数。(ただし、1日でうさぎは大人になるとする。)

フィボナッチ数の定義

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

フィボナッチ数列

定義 1

$F_0 = 0, F_1 = 1$ として、漸化式

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

によって定義される数列をフィボナッチ数列という。

その一般項は

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

となる。一般項を求めるような操作は、解析学の一部である。

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

であることは、線形代数や行列算を用いて証明することができる。

少なくともこのようなことは線形代数IIを学んだあとならたやすくできるはず。(α, β のことは固有値という。)

フィボナッチ数列は単なる数字の羅列だが、いくつか規則がある。

定理

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

以下を示せ。

定理 1

- ① $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
- ② $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
- ③ $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$
- ④ $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
- ⑤ $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$
- ⑥ $\text{GCD}(F_n, F_m) = F_{\text{GCD}(n,m)}$

式の意味はなんだろうか？

(6) の性質は何か？

$$\text{GCD}(F_n, F_m) = F_{\text{GCD}(n,m)}$$

GCD は最大公約数。

フィボナッチ数列と数論

$$\text{GCD}(F_n, F_m) = F_{\text{GCD}(n,m)}$$

数の倍数、約数は整数論における基本的な対象。

フィボナッチ数は素数と関わる対象である。

フィボナッチ数列は自然の理解だけでなく、数論的発想で研究ができることを意味する。

数列 F_n は整数論的に研究する価値がある “関数” である。

といえる。

実際

Fibonacci numbers に関する数学の研究論文数は 7786 本そのうち、Primary Classification は (確かに圧倒的に数論の分野!)

- ① Number theory(Number Theory) 4441
- ② Combinatorics 973
- ③ Computer Science 316
- ④ History and biography 180
- ⑤ Group theory and generalizations 179
- ⑥ Linear and multilinear algebra ; matrix theory 131
- ⑦ Numerical analysis 112
- ⑧ Dynamical systems and ergodic theory 110
- ⑨ Information and communication circuits 107
- ⑩ Statistical mechanics structure of matter 100
- ⑪ Special function 83
- ⑫ Quantum theory 83
- ⑬ General 82
- ⑭ Probability theory and stochastic processes 75

Fibonacci numbers に関する論文を書いた世界のトップは、

- Luca, Florian 135 本 (秋山先生と共著あり)
- Horadam, Alwyn Francis 132 (二世代くらい前の Fibonacci 数の世界的権威。2016 年没)
- Hoggatt, Verner E., Jr. 114 本 (二世代くらい前の Fibonacci 数の世界的権威。アメリカ)
- Shannon, Anthony G. 94 本 (オーストラリアの数学者、2 つ上の数学者との共同研究者)
- Bicknell-Johnson, Marjorie 48 本 (数学者、パイロット、小説家)

問題 1

フィボナッチ数列の素因数には全ての素数が現れるか？

ちなみに、Mathematica で Fibonacci 数を出すには、

`Fibonacci[n]`

のコマンドを用いる。

フィボナッチ素数

フレッシュマン
セミナー

担当：丹下
基生

フィボナッチ数かつ素数であるものをフィボナッチ素数という。例えば、

2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, 433494437, 2971215073, ...

である。

F_n が素数 $\Rightarrow n$ が素数。

しかし、

n が素数 $\not\Rightarrow F_n$ が素数

例えば、

$$F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$$

F_n が素数となる n は、

3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 43, 47, 83, 131, 137, 359, 431, 433, 449,
509, 569, 571, 2971, 4723, 5387, 9311, 9677, 14431, 25561, 30757,
35999, 37511, 50833, 81839.

とつづくが、これら無限に続くかどうか知られていない。これら
のことにに関して何か仕事をする分野を数論という。とりわけ、
このような話は、解析数論と呼ばれる分野と関係がある。

筑波大学では三河先生や秋山先生が詳しい

素数番目のフィボナッチ数

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

p を素数とすると、 $n < p$ となる n において、

$GCD(F_n, F_p) = F_{GCD(p,n)} = F_1 = 1$ である。

F_p の素因数には F_n の素因数を含んでいない。

ゆえに、 F_p になるたびに、それまでに登場しない新しい素因数が出てくる。

特に、2つの素数どうしは、互いに素である。

問題 2

p を素数として、 F_p の全ての素因数を見ていけば、フィボナッチ数列 F_n の全ての素因数が登場するのか？

素数べき乗のフィボナッチ数

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

$$\text{GCD}(F_n, F_m) = F_{\text{GCD}(n,m)}$$

上の性質を使えば、 $n < m$ として、

$$\text{GCD}(F_{p^n}, F_{p^m}) = F_{\text{GCD}(p^n, p^m)} = F_{p^n}$$

$$F_p < F_{p^2} < F_{p^3} < \dots$$

だから、 F_{p^n} という数列にはどんどん新しい素因数が登場する。

$$F_2 = 1, F_4 = 3, F_8 = 3 \cdot 7, F_{16} = 3 \cdot 7 \cdot 47, F_{32} = 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207,$$

$$F_{64} = 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 1087 \cdot 2207 \cdot 4481$$

$$F_{128} = 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 127 \cdot 1087 \cdot 2207 \cdot 4481 \cdot 186812208641$$

$$F_{256} = 3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 127 \cdot 1087 \cdot 2207 \cdot 4481$$

$$\cdot 119809 \cdot 186812208641 \cdot 4698167634523379875583$$

素数番目のフィボナッチ数

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

問題 2

p を素数として、 F_p の素因数にフィボナッチ数列 F_n の全ての素数が登場するのか？

答え

No.

(証明) 素数 7 は、 $F_8 = 3 \cdot 7$ として初めてフィボナッチ数列の素因数として登場し、上で書いたことから、8 より大きい全ての素数の素因数にはならない。 $n = 8$ が 7 を素因数としてもつ初めて登場するフィボナッチ数だから、8 以下の素数 p に対しても F_p 素因数として 7 は登場しない。

F_{p^m} の素因数は、すべて、 F_p の素因数に含まれない。

事実

とくに、 F_1, F_2, F_3, \dots の中に素数が素因数として無限個含まれている。

問題 3

F_{p^n} の形の素因数を見れば、フィボナッチ数列に登場する全ての素因数がわかるか？

Today's riddle.

フレッシュマ
ンセミナー

担当：丹下
基生

Answer 1

Q. Why is 6 afraid of 7?

A. 7 8 9.