2018年6月29日

フレッシュマンセミナー
イプシロンエヌ(デルタ)を極めよう

丹下　基生

1　ϵ-N 論法による収束の定義

ϵ-N 論法によって、数列の収束

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

であることを定義せよ！

(2**分**)

定義I

任意の$\epsilon > 0$に対して、ある自然数Nが存在して、$n > N$なる任意のnに対して、

$$|a_n - a| < \epsilon$$

となる。

任意の$\epsilon > 0$に対して、自然数Nを見つけれてこればよい。Nはϵの関数と思えば良い。

2　ϵ-N 論法による証明

例題1

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0$$

であることを、ϵ-N 論法によって示せ。

任意の $\epsilon > 0$ に対して、自然数 N を見つける。

(証明)

$\forall \epsilon > 0$ **に対して、この場合、** $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ **ととる。**

$n > N$ **となる任意の自然数** n **をとると、**

$$|a_n - a| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

(証終)

問題2

数列

$$a_n = \frac{1}{1+e^n}$$

は0に収束することをϵ-N論法を使って示せ。

(証明) N **を** $N > -\log\epsilon$ **となる自然数とする。**
$n > N$ **となる任意の** n **をとる。**

$$|a_n - a| = \frac{1}{1+e^n} < \frac{1}{e^n} < e^{-N} < \epsilon$$

よって、 $\dfrac{1}{1+e^n} \to 0$ **となる。(証終)**

(ϵ-N 論法を使わなければ)

$$|a_n - a| = \frac{1}{1+e^n} < \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n} \to 0$$

となるので、
はさみうちの原理より、
$a_n \to 0$ となる。(証終)

$e^n > n$であること。$f(x) = e^x - x$とし、
$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad (x \geq 0)$であり、
$f(0) = 1 > 0$であるから、$x > 0$において、
$f(x) > 0$であるからわかる。
他に、テイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

であるから、自然数nに対して、

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{28} + \frac{n^3}{3!} + \cdots > n$$

もう一問やってみよう

問題3

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

は0**に収束することを示せ。**

(証明) $X > \epsilon^{-2} \Leftrightarrow \epsilon > 1/\sqrt{X}$ **であるから、**
$N = \lceil \epsilon^{-2} \rceil$ **としよう。** $N < n$ **となる任意の** n **に対して**

$$|a_n - a| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$$

となる。 **(証終)**

問題4

数列a_nが$a_n \to a$であるとき、

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a$$

であることを示せ。

3　収束しないことの証明

例題2

$a_n = (-1)^n$ **が収束しないことを示せ。**

(証明)

任意の$a \neq \pm 1$**について収束しないことを証明する。**

$\epsilon = \min\{|a-1|, |a+1|\}$**とする。**

任意の$N > 0$**と、ある**$n > N$**に対して、**

$$|a_n - a| \geq \epsilon$$

が成り立つ。よって収束しない。

$a = \pm 1$**のときが残っているが証明は同様。**

(証終)

4　ϵ-δ 論法による連続性の定義

ϵ-δ 論法によって、関数 $f(x)$ が $x = a$ において、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

であることを定義せよ！

(2分)

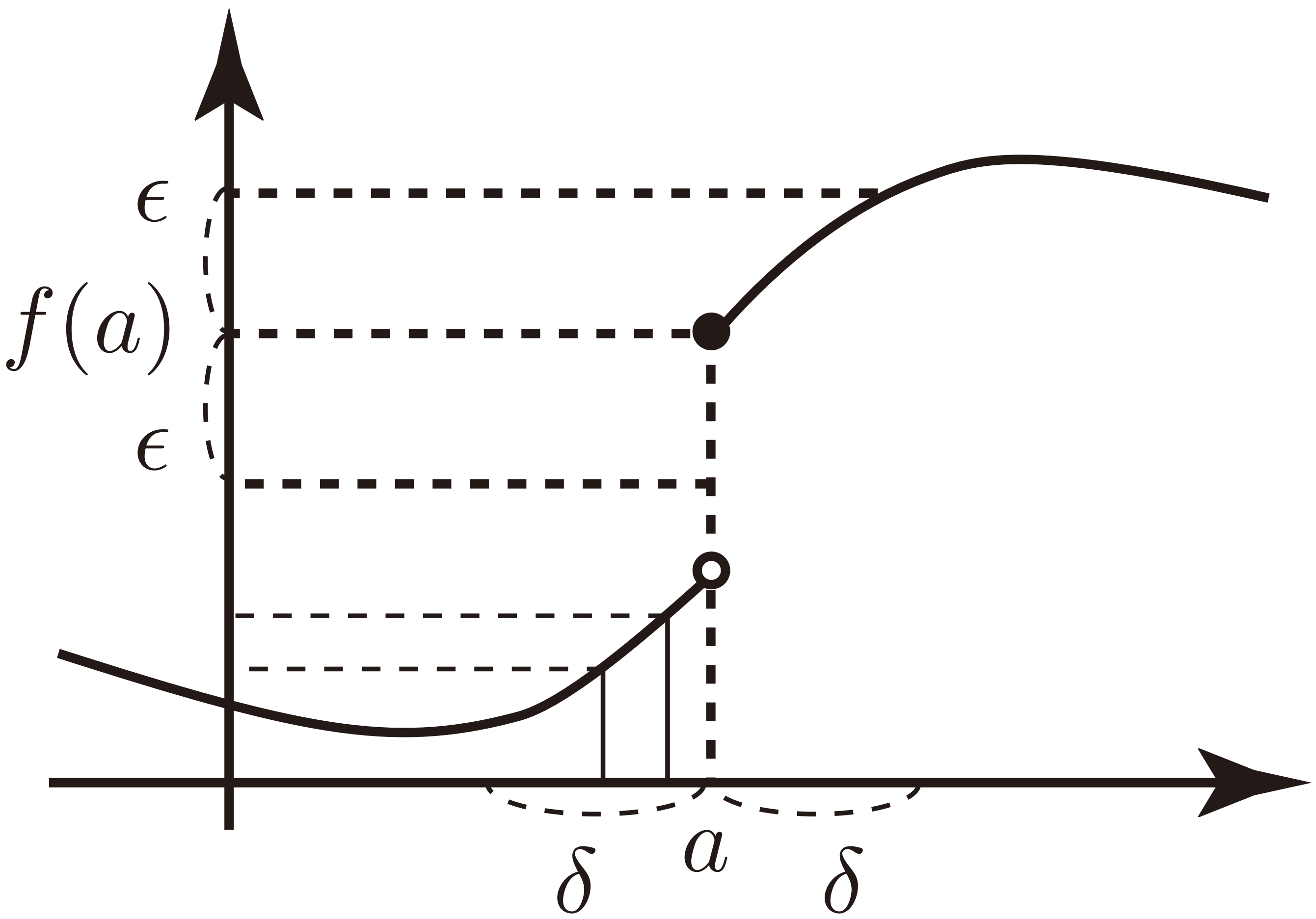
定義II

$f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義。任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある δ が存在して、$|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して、

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

となる。

x の近くの実数が丸々 $f(x)$ の任意の近くに入るようにできること。


ϵ
$f(a)$
ϵ
δ
a
δ

(連続でないことは)
ある$\epsilon > 0$に対して、
どんな正のδに対しても、$|x-a| < \delta$の中に、
$f(x)$が$(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$の中に入らないよう
なものがある。

aを固定する。
任意の$\epsilon > 0$に対して、実数δを見つけれてこれ
ばよい。δはϵの関数と思えば良い。

5　ϵ-δ 論法による証明

例題3

$y = x$ が $x = a$ で連続であることを ϵ-δ 論法で示せ。

(証明)
任意の$\epsilon > 0$**に対して**$\delta = \epsilon$**としよう。**
$|x - a| < \delta = \epsilon$**とする。そのような**$x$**を任意に取れば、**

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$$

となる。(証終)

例題4

$y = 2x^2$ が $x = a$ で連続であることを ϵ-δ 論法で示せ。

(証明)

任意の$\epsilon > 0$**に対して**$\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{2(1+2a)}\right\}$**としよう。**

$|x-a| < \delta$**とする。**

$$\begin{aligned} |x+a| = |x-a+2a| &\leq |x-a| + 2|a| \\ &< \delta + 2|a| \\ &\leq 1 + 2|a| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |2x^2 - 2a^2| \\
&= 2|x-a||x+a| \\
&< 2(1+2|a|)\delta < \epsilon
\end{aligned}
$$

となる。(証終)

一体何をしているのか？

$|2x^2 - 2a^2|$のうち、$x \to a$において小さくなる部分と、そうでもない部分を分けている。

$$|x-a| \text{ と } |x+a|$$

三角不等式

$$|A+B| \leq |A| + |B|$$

$|f(x) - f(a)|$がすごく小さくなるようにしておいて、$< \epsilon$ となるようにするには、どのようにδをとればよかったか

δを決めるのは一番最後。

問題5

$f(x) = x^3 + 2x^2$ が $x = a$ で連続であることを ϵ-δ 論法により示せ。

(証明)
任意の$\epsilon > 0$**をとる。**

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3|a|^2 + 7|a| + 3}\right\}$$ **とする。**

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f(a)| \\
&= |x-a||x^2 + ax + a^2 + 2(x+a)| \\
&\leq \delta|(x-a)^2 + (3a+2)(x-a) + 3a^2 + 4a| \\
&\leq \delta(|x-a|^2 + (3|a|+2)|x-a| + 3|a|^2 + 4|a|) \\
&\leq \delta(\delta^2 + (3|a|+2)\delta + 3|a|^2 + 4|a|) \\
&\leq \delta(3|a|^2 + 7|a| + 3)
\end{aligned}
$$

(証終)