2018年7月6日

フレッシュマンセミナー
イプシロンエヌ(デルタ)を極めようII

丹下　基生

例題5

$y = e^x$ は $x = a$ で連続であることを ϵ-δ 論法により示せ。

(証明)

$\epsilon > 0$ **に対して、**

$$\delta = \log(1 + \epsilon e^{-a})$$

とする。 $|x - a| < \delta$ **なる** x **に対して、**

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| \leq e^a(e^{|x-a|} - 1)$$

$$\leq e^a(e^\delta - 1) < \epsilon$$

(証終)

$$|e^X - 1| \leq e^{|X|} - 1$$

$X \geq 0$ なら等号が成り立つので成立

$X < 0$ とすると、

$$|e^X - 1| = 1 - e^X = 1 - \frac{1}{e^{-X}} = \frac{e^{|X|} - 1}{e^{|X|}} \leq e^{|X|} - 1$$

問題6

$y = e^{x^2}$ **は、** $x = a$ **で連続であることを示せ。**

問題7

$y = \log x$ **は** $x > 0$ **で連続であることを示せ。**

ヒント： $1 + X > 0$ **のとき、**
$|\log(1 + X)| \leq \log(1 + |X|)$ **が成り立つ。**

例題6

$f(x), g(x)$ が $x = a$ で連続であれば、

$$f(x) + g(x)$$

も連続であることを示せ。

$\epsilon > 0$**に対して、ある**δ**が存在して、**$|x-a|<\delta$**が存在して、**

$$|f(x)-f(a)|<\epsilon/2$$

$$|g(x)-g(a)|<\epsilon/2$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}
&|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)| \\
&\leq |f(x)-f(a)|+|g(x)-g(a)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

(証終)

問題8

$f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ で連続であれば、
$f(x)g(x)$ も $x=a$ で連続であることを示せ。

問題9

$f(x)$ が $x=a$ で連続とし、
数列 a_n が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるとき、
$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ であることを示せ。

1　連続でないことの証明

例題7(金子先生の[次回黒板で解く問題6]

$$\sin\frac{1}{x}$$

は$x=0$で連続ではないことを示せ。

不連続性

$y = f(x)$ が $x = a$ で不連続であるとは、ある $\epsilon > 0$ と、任意の $\delta > 0$ に対して、$|x - a| < \delta$ が成り立つようなある x に対して、

$$|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

を満たす。(14 ページの絵を思い出せ。)

(証明)

$\epsilon = 1/2$ とせよ。任意の δ に対して、

$x = \dfrac{2}{(2n-1)\pi} < \delta$ を満たす自然数 n が存在し、

$$|\sin\frac{1}{x}| = |\sin\frac{2n-1}{2}\pi| = |(-1)^n| = 1 > 1/2$$

となる。(証終)

問題10(三原先生の第5回問1(5))

次の関数 $y = f(x)$ **が連続でないことを示せ。**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問題6のヒント

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\log(\epsilon e^{-a^2} + 1)}{2|a| + 1}\right\}$$

とすればよい。

2　連立一次方程式を解こう

問題11

次の連立一次方程式を行列の基本変形を用いて解け。

$$
\begin{cases}
3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\
2x_1 + x_3 = -1 \\
x_1 + x_2 - x_3 = -1
\end{cases}
$$

問題12

次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = -4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$