

第1回 ('19年11月13日：Keywords・・・広義積分)

今日の演習.

1. 広義積分の計算 (直接計算できる例) . 2. 広義積分の収束

例題-1-1.

次の広義積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx \quad (2) \int_0^1 x^2 \log x dx \quad (3) \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

例題-1-2.

つぎの広義積分が収束するか判定せよ。

$$(4) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (5) \int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x} \quad (6) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

考え方.

・広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ の被積分関数 $f(x)$ が a, b の近くで発散する、もしくは定義できないことを確認。

・その範囲で $|f(x)| \leq g(x)$ となる関数 $g(x)$ を見つけ、 $\int_a^b g(x)dx$ が収束することを示す。結果 $\int_a^b f(x)dx$ も収束する。

・もしくは $|f(x)| \geq g(x)$ となる関数 $g(x)$ を見つけ、 $\int_a^b g(x)dx$ が発散することを示す。結果 $\int_a^b f(x)dx$ が発散する。

・収束する $\int_0^1 g(x)dx$ として候補となる関数とその積分値 ($x \rightarrow 0$ で広義積分)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \quad (a < 1),$$

・収束する $\int_1^{\infty} g(x)dx$ として候補となる関数とその積分値 ($x \rightarrow \infty$ で広義積分)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1} \quad (a > 1),$$

・ $f(x)$ に対して $g(x)$ を作るには、 $f(x)$ の分母と分子を簡単な x^a や e^x , $\log x$ などに直すと良い。

・また、 $x \rightarrow c < \infty$ において広義積分になる場合 $\frac{1}{x^a}$ を $\frac{1}{(x-c)^a}$ に置き換えて考えよ。

・次の関数の大小を目安にすると良い。

$x \rightarrow \infty$ において .

$$1 < (\log x)^{\frac{1}{2}} < \log x < (\log x)^2 < (\log x)^n < (\log x)^{n+1} < x^{\frac{1}{n}} < x^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}} < x < x^2 < x^n < x^{n+1} < e^x < (e^x)^2$$

$$(e^x)^{-2} < (e^x)^{-1} < (e^x)^{-\frac{1}{n}} < x^{-n} < x^{-2} < x^{-1} < x^{-\frac{1}{2}} < x^{-\frac{1}{n}} < (\log x)^{-n} < (\log x)^{-2} < (\log x)^{-1} < (\log x)^{-\frac{1}{2}} < 1$$

$x \rightarrow 0$ において .

$$|\log x|^{\frac{1}{2}} < |\log x| < |\log x|^2 < |\log x|^n < |\log x|^{n+1} < x^{-\frac{1}{n}} < x^{-\frac{1}{3}} < x^{-\frac{1}{2}} < x^{-1} < x^{-2} < x^{-n}$$

$$x^n < x^3 < x^2 < x < 1 < |\log x|^{-n} < |\log x|^{-2} < |\log x|^{-1} < |\log x|^{\frac{1}{2}}$$

問題-1-1.

次の積分を計算せよ。

$$(7) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx \quad (8) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\text{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (9) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

問題-1-2.

次の広義積分を計算せよ。

$$(10) \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (11) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (12) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

問題-1-3.

次の広義積分が収束するかどうか判定せよ。

$$(13) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}} dx \quad (14) \int_1^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$(15) \int_0^{\infty} \frac{x^{19}}{\sqrt{x^{2019} + x^{11} + 1}} dx$$

$$(16) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x}$$

$$(17) \int_0^1 x \left(\log \frac{1}{x} \right)^{100} dx$$

$$(18) \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$$

.....

宿題-1-1. [広義積分]

次の広義積分を求めよ。

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx \quad (2) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$$

宿題-1-2. [広義積分]

次の広義積分が収束するか判定せよ。

$$(3) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \sqrt{1 - x}} dx \quad (4) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x^2 + 1)}} dx \quad (5) \int_0^{\infty} e^{-x} \log x dx$$

宿題-1-3. [広義積分]

次の広義積分は収束するか？

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$$

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://mochans.blogspot.jp/>

(授業内容など)

Twitter: **BasicMathIIB**

(blog など更新情報などその他) 相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。