微積分演習F

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第2回（'19年11月20日：Keywords ⋯ ガンマ関数・ベータ関数・曲線の長さ）

今日の演習.

1. 広義積分の応用．2. ガンマ関数・ベータ関数．曲線の長さ

例題-2-1.

$s > 0$ のとき、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

は収束することを示せ。$\Gamma(s)$ はガンマ関数という。

問題-2-1.

$p, q > 0$ のとき、広義積分

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

は収束することを示せ。$B(p, q)$ はベータ関数という。

考え方.

・$s > 0$ において $\Gamma(s)$ は広義積分として収束する。
・$p, q > 0$ において $B(p, q)$ は収束する。
・$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(1) = 1$ や $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ なる公式があるが、ここでは証明せずに用いる。
・$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成り立つ。とくに、n が自然数とすると、$\Gamma(n) = (n-1)!$ である。

例題-2-1.

次の積分をガンマ関数を用いて示せ。ただし n は自然数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

問題-2-2.

次の積分をガンマ関数を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$ (5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}}$ (6) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$

定義-2-1.

曲線の長さ平面上の曲線 C が $(x(t), y(y))$ $(a \leq t \leq b)$ によって定められたとする。このとき、C の $(a \leq t \leq b)$ の長さ $l(C)$ は以下のようにして求められる。

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

例題-2-2.

次の曲線の長さを求めなさい。

(7) $(x, y) = (t, t^2)$ $(0 \leq t \leq 1)$ (8) $(t, f(t))$ $(a \leq t \leq b)$

問題-2-3.

曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ は、カテナリーと呼ばれ、均質なひもの両はしを同じ高さにつるしたときの曲線を表す関数である。カテナリーの $-1 \leq x \leq 1$ となる部分の曲線の長さを求めよ。

問題-2-4.

次で表される曲線の長さを求めよ。

(9) $(x, y) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ (アステロイド)

(10) $(x, y) = \left(t^2 \cos \dfrac{1}{t}, t^2 \sin \dfrac{1}{t}\right)$ $(0 \leq t \leq 1)$

宿題-2-1. [ガンマ関数]

次の関数をガンマ関数 $\Gamma(s)$ を用いて表せ。

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-bx^c}x^{a-1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-tx}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}dx$

宿題-2-2. [螺旋の長さ]

次で定義できる曲線は全て螺旋であるが、長さが有限なものはどれか確かめよ。もし有限ならばその長さを求めよ。

$$(x,y) = (e^{-r}\cos r, e^{-r}\sin r) \quad (1 \le r < \infty)$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{r}\cos r, \frac{1}{r}\sin r\right) \quad (1 \le r < \infty)$$

$$(x,y) = \left(\frac{1}{r^2}\cos r, \frac{1}{r^2}\sin r\right) \quad (1 \le r < \infty)$$

宿題-2-3. [アステロイド (おまけ問題)]

長さを変えない素材でできた長さ 1 の棒を、端点が x 軸、y 軸になるように平面の第一象限におくとき、その棒が存在する平面上の領域は問題 2-4(9) のアステロイド (ただし $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)) と x 軸と y 軸で囲まれた領域になる。このことを数式を使って説明せよ。

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html`
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.