微積分演習F

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'19 年 12 月 4 日：Keywords ··· 多変数の連続性、偏微分、全微分可能

今日の演習.
1. 偏微分係数の計算、2. 連続、全微分の理解とその判定法

---

1. 連続

$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において連続であるとは、$(x,y)\to(a,b)$ において $f(x,y)\to f(a,b)$ が成り立つことである。
注意すべきことは、$(x,y)\to(a,b)$ において (a,b) に近づくあらゆる経路を考える必要がある。

2. 偏微分

$f(x,y)$ において、
(a,b) での x **による偏微分**とは $f(x,b)$ の $x=a$ での微分のことであり $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ とかく、
(a,b) での y **による偏微分**とは $f(a,y)$ の $y=b$ での微分のことであり $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とかく。

これらの値を偏微分係数という。$f(x,y)$ が、x もしくは y において、**偏微分可能**とは、
これらの上の意味でので微分係数が存在することをいう。
上の偏微分係数はそれぞれ $f_x(a,b)$ や $f_y(a,b)$ と書くことがある。

3. 高次偏導関数

$f(x,y)$ に偏微分を何回か続けて行うことで得られる微分係数 $\dfrac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}(a,b)$ を $p+q$ **次の偏微分係数**という。例えば $p=3,q=2$ となる 5 次の偏微分係数は $f_{xxxyy}(a,b)$ と書き表す。この微分係数は十分大きい次数の偏導関数が全て連続であれば、その順序によらない。

4. 全微分

・$f(x,y)$ が (a,b) において**全微分可能**とは、

$$f(x,y)-f(a,b)=A(x-a)+B(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$$

を満たす A,B が存在することをいう。
・つまり、$F(x,y)=\dfrac{f(x,y)-f(a,b)-(A(x-a)+B(y-b))}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$ とおくとき、

$$F(x,y)\to 0\ \ (x,y)\to(a,b)$$

であることと同値である。
・全微分の条件は、$g(x,y)=\begin{cases}F(x,y) & (x,y)\neq(a,b)\\ 0 & (x,y)=(a,b)\end{cases}$ とおくとき $g(x,y)$ が連続であることと同値である。
・$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能なら、$A=f_x(a,b),B=f_y(a,b)$ である。
ここで、$o(h(x,y))$ の部分は $\dfrac{o(h(x,y))}{h(x,y)}\to 0\ \ (x,y)\to(a,b)$ となる関数を表している。

・関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であることは、$f(x,y)$ が (a,b) において、接平面が一意的に存在することを意味している。

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

を**接平面の方程式**という。

(参考)1 変数関数の微積分を忘れた人のために関数 $y=f(x)$ の微分可能性を思い出しておく。$x=a$ で微分可能であるとは $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在すること、つまり、ある A が存在して、

$$\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a} \to 0 \ \ (x\to a)$$

が成り立つことである。それは

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(|x-a|)$$

と書き直すことができる。もし微分可能であるなら $A=f'(a)$ である。$x=a$ で微分可能であるとは、その点で接線が存在することを意味しており $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ を**接線の方程式**という。

例題-3-1.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は、$(0,0)$ において極限を持たないことを示せ。

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ は、$(0,0)$ で連続であることを示せ。

問題-3-1.

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^3+x^3}{x^2+y^2}$ は $(x,y)\to(0,0)$ において極限をもつか？

(4) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は $(x,y)\to(0,0)$ において極限をもつか？

例題-3-2.

次の関数の偏微分 f_x, f_y を計算せよ。

(5) $f(x,y)=3x^2y+yx^2$

(6) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

問題-3-2.

次の関数の偏微分 f_x, f_y を計算せよ。

(7) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2}$

(8) $f(x,y) = (x+2y)^{\sin xy}$

例題-3-3.

次の関数が $(0,0)$ において全微分可能であるかどうか判定せよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+4x^2y^2}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

問題-3-3.

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ は原点で全微分可能か？

宿題-3-1. [偏微分係数]

次の関数の偏微分係数 f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} を求めよ。

(1) $f(x,y) = \log(x+e^y)$

(2) $f(x,y) = x^y$

宿題-3-2. [極限・全微分]

(3) 次の極限は存在するか？理由を付して答えよ。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3y^2}{2x^2+y^2}$$

(4) 次の関数が全微分可能であるか理由込みで判定せよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.