微積分演習F

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第4回（'19 年 12 月 11 日：Keywords ··· 接平面・合成関数の微分法)

今日の演習.
1. 接平面の方程式。2. 合成関数の微分法の取得。

考え方.
(a,b) での $z=f(x,y)$ の接平面の方程式は

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

であった。この式は、$(x-a, y-b, z-f(a,b))$ が $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ と垂直であるという方程式であるから、$z=f(x,y)$ の (a,b) での法線の方程式は、

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

となる。

考え方.
合成関数の微分法 I
$f(x(t),y(t))$ を t によって微分するとき、以下の公式が成り立つ。

$$\frac{df(x(t),y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

ただし、$\dfrac{df(x(t),y(t))}{dt}$ は $f(x,y)$ に t の関数 $x(t), y(t)$ を代入したときに得られる 1 変数関数 $F(t)=f(x(t),y(t))$ の t での微分を意味し、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))$ は $f(x,y)$ を x によって偏微分して得られる関数に $x(t), y(t)$ を代入して得られる関数。

例題-4-1.
次の関数の $(a,b,f(a,b))$ での接平面および法線の方程式を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$
$(1,1,2)$

(2) $f(x,y)=3x^2y+xy$
$(1,-1,-4)$

問題-4-1.
次の関数の $(a,b,f(a,b))$ での接平面の方程式と法線の方程式を求めよ。

(3) $z = xy$
(a, b, ab)

(4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
$(\cos\theta, \sin\theta, 1)$

例題-4-2.

次の関数の t による微分および 2 回微分を f の偏微分を用いて計算せよ。

(5) $f(t^2, t^3)$

(6) $f(x + ht, y + kt)$

問題-4-2.

$f(x, y)$ が次の関数のとき $f(at + c, bt + d)$ の t による微分を求め、合成関数の微分法が正しいことを確かめよ。

(7) $f(x, y) = xy$ のとき $f(at + c, bt + d)$

次の関数の t の微分を f の偏微分を用いて表せ。

(8) $f(tx, ty)$

(9) $f(\sin t, \cos t)$

問題-4-3.

$f(x, y) = e^{x^2 y}$ とし、$x(t) = \cos t, y(t) = t^2$ としたとき得られる $f(x(t), y(t))$ の t による微分を求めよ。

問題-4-4.

t^{2t^3} を宿題 3.1 の (2) および、例題 4.2(5) などを用いて合成関数の微分法を用いて t の微分を示せ。

宿題-4-1. [接平面と法線]

$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式を求めよ。ただし、$a^2 + b^2 < 1$ とする。

宿題-4-2. [合成関数の微分]
$x = t^3$ と $y = \dfrac{t}{1+t^2}$ とする。$f(x,y) = \displaystyle\int_1^x \sin(sy)\frac{ds}{s}$ との合成関数の微分を計算することによって

$$\frac{d}{dt}\int_1^{t^3} \sin\left(\frac{st}{1+t^2}\right)\frac{ds}{s}$$

を求めよ。ただし $t > 1$ とする。また、この定積分において、積分と微分の順序を入れ替えても良いとする。

宿題-4-3. [k 次斉次式]
$f(x,y)$ が k 次斉次関数であるとは、$f(x,y)$ が $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ を満たすことである。

(1) $f(x,y)$ が k 次斉次関数であるなら、次が満たされることを示せ。

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = kf(x,y)$$

(2) 逆に $f(x,y)$ が上の等式を満たすなら、$f(x,y)$ は斉次関数であることを $\dfrac{\partial(t^{-k}f(tx,ty))}{\partial t}$ を計算することで示せ。

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.