微積分演習F
担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回 ('19年12月18日：Keywords ⋯ 合成関数の微分法・テイラー展開)

今日の演習.
1. 合成関数の微分法をマスターすること．2. 多変数関数のテイラー展開

合成関数の微分法II

$f(x(s,t),y(s,t))$ を s,t によって偏微分するとき、以下の公式が成り立つ。

$$\frac{\partial f(x(s,t),y(s,t))}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\cdot\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\cdot\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f(x(s,t),y(s,t))}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\cdot\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}$$

考え方. この公式は、基本的に合成関数の微分法Iを用いている。$F(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$ とする。上の合成関数 $F(s,t)$ の微分法IIを行列を使ってまとめると

$$\begin{pmatrix}F_s(s,t) & F_t(s,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_x(x(s,t),y(s,t)) & f_y(x(s,t),y(s,t))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{pmatrix}$$

となる。

定義-5-1.
この最後の 2×2 行列 $\begin{pmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{pmatrix}$ をヤコビ行列という。ヤコビ行列の行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=x_sy_t-x_ty_s$ をヤコビアンという。

定義-5-2.
$f(x,y)$ が C^n 級関数であるとは、$f(x,y)$ のすべての n 次偏微分可能で、n 次までの偏導関数が全て連続であることをいう。また、$f(x,y)$ が何回でも x,y に関して偏微分できる場合、$f(x,y)$ は C^∞ 級関数という。

考え方. 次の性質が成り立つことを思い出しておこう。

・$f(x,y)$ が C^1 級であれば、$f(x,y)$ は全微分可能である。逆に全微分可能であることは C^1 級のための十分な条件ではない。

・$f(x,y)$ が C^2 級であれば、$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ である。

・一般に C^n 級であれば、$f(x,y)$ の n 次偏導関数はその微分の順番によらない。

定義-5-3.
2変数関数 $f(x,y)$ を C^n 級関数とする。$(x,y)=(a,b)$ でのテイラー展開を

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+(hD_x+kD_y)f(a,b)+\frac{1}{2!}(hD_x+kD_y)^2f(a,b)$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(hD_x+kD_y)^{n-1}f(a,b)+\frac{1}{n!}(hD_x+kD_y)^n f(a+h\theta,b+k\theta)$$

と定義する。
ここで、$D_x f(x,y)=f_x(x,y)$、$D_y f(x,y)=f_y(x,y)$ であり、また、$D_x D_y f(x,y)=f_{yx}(x,y)$ などである。(0,0) でのテイラー展開をマクローリン展開という。
ここで、D_x, D_y は関数に作用する $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ という微分作用素である。

<u>考え方.</u> 表示 $(hD_x+kD_y)^2 f(a,b)$ は、f に $(hD_x+kD_y)^2=h^2D_x^2+2hkD_xD_y+k^2D_y^2$ を作用させてから (a,b) を代入することを意味する。

<u>考え方.</u> 多変数関数のテイラー展開は多変数関数を多変数の多項式で近似することを意味している。例えば、1 次の項は接平面を表し、2 次の項は凹凸を表す。n 次までの展開に現れる多項式は、関数の n 次近似多項式という。

<u>定義-5-4.</u>

上のテイラー展開の 2 次の式は、

$$\frac{1}{2!}(hD_x+kD_y)^2 f(a,b)=\frac{1}{2}(h^2D_x^2+2hkD_xD_y+k^2D_y^2)f(a,b)$$

$$=\frac{1}{2}(h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b))=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$$

となる。この行列 $\begin{pmatrix}f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix}$ をヘッセ行列という。

例題-5-1.

次の関数を合成関数の s,t による偏微分を $f(x,y)$ の偏微分 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ を用いて計算せよ。

(1) $f(2s+3t, 3s+4t)$　　(2) $f(s\cos t, s\sin t)$

問題-5-1.

次の合成関数の s,t による偏微分を $f(x,y)$ の偏微分 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ を用いて計算せよ。

(3) $f(t^2+s^2, t^2-s^2)$　　(4) $f(e^{-s}\cos t, e^{-s}\sin t)$

例題-5-2.

$f(x,y)=x^2+x^3-y^2-3xy^2$ のとき、$(D_x^2+D_y^2)f(a,b)$ を計算せよ。

問題-5-2.

$f(x,y)=e^{2x+y+1}$ のとき、$(D_x+3D_y)^2f(0,0)$ を計算せよ。

例題-5-3.

次の関数をマクローリン展開せよ。

(5) $z=e^{x+y}$

(6) $z=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$

問題-5-3.

次の関数を 2 次まで近似多項式がわかる形でマクローリン展開せよ。

(7) $z=\dfrac{1+x}{1+y}$

(8) $z=\dfrac{x^2y}{1-xy}$

宿題-5-1. [極座標表示のヤコビアンとラプラシアン]

極座標表示 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ に対して以下の問題に答えよ。

(1) この極座標表示に関するヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ。

(2) 関数 $z=f(x,y)$ に対して次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

宿題-5-2. [テイラー展開]
次の $f(x,y)$ を $x^2+y^2<1$ となる領域上の関数とする。

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

(1) $z = f(x,y)$ で定義される関数の (a,b) での 1 次の近似をする多項式を求めよ。

(2) $(a,b)=(0,0)$ において、この関数を近似する 2 次の多項式を求めよ。

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html`
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.