微積分演習F 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第6回 ('19年12月25日：Keywords $\cdots$ 極値問題、陰関数の定理)

今日の演習.
1. 関数の極値がどこにあるか判定できるようにする (極値問題)。2. 陰関数定理とその意味を理解すること。

考え方. 関数 $z = f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極値であるためには、$(x,y) = (a,b)$ での偏微分係数が 0 になることつまり、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つが必要である。このような点 (a,b) を**臨界点**という。その値 $f(a,b)$ を**臨界値**という。このとき、関数の (a,b) でのテイラー展開の 1 次の項は消えるので、2 次の項まで展開すると、

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)) + \cdots$$

となる。2 次の項がその関数の凹凸を決める。つまり、(a,b) が極値かどうか、極値であるとしたら極大であるか、極小であるかが以下のようにしてわかる。

(a,b) でのヘッセ行列は下のようになる。

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

この行列は実対称行列であるので 2 つの固有値 σ_1, σ_2 はどちらも実数である。
また、$\det(H(a,b)) = \sigma_1\sigma_2$ であることも思い出しておこう。

$$\text{臨界点 } (a,b) \text{ は、} \begin{cases} \text{極小点である。} & \sigma_1, \sigma_2 > 0 \ \ (\text{正定値}) \\ \text{極大点である。} & \sigma_1, \sigma_2 < 0 \ \ (\text{負定値}) \\ \text{極大点でも極小点でもない。} & \sigma_1\sigma_2 < 0 \ \ (\text{不定値}) \end{cases}$$

この条件を言い換えると以下のようになる。

$$\text{臨界点 } (a,b) \text{ は、} \begin{cases} \text{極小点である。} & \det(H(a,b)) > 0, f_{xx}(a,b) > 0 \\ \text{極大点である。} & \det(H(a,b)) > 0, f_{xx}(a,b) < 0 \\ \text{極大点でも極小点でもない。} & \det(H(a,b)) < 0 \end{cases}$$

$\det(H(a,b)) = 0$ のときは、極値かどうかこの方法からは判定できない。

(参考) $f(x,y) = x^4$ は、$f'(0) = f''(0) = 0$ であり、$x = 0$ で極値になる。しかし、$f(x,y) = x^3 + 1$ は、$f'(0) = f''(0) = 0$ であるが、$x = 0$ で極値ではない。

(参考) 1 変数の場合、$y = f(x)$ が

$$f(x) = 1 + 4x + 2x^2 = -1 + 2(x+1)^2$$

となるときを考える。$x = -1$ のときに 1 次の項が消えており、2 次の項の係数 2 が下に凸 (つまり極小値) である。このように展開できることは、$f'(-1) = 0$ かつ $f''(-1) > 0$ という条件として表せた。また、

$$f(x) = 5x - 4x^2 + x^3 = 2 - (x-1)^2 + (x-1)^3$$

のときも考える。この $x = 1$ での展開は、$f'(1) = 0$ かつ $f''(1) < 0$ を意味する。このとき、$x = 1$ で、関数は極大となる。

例題-6-1.

次の関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めよ。

(1) $f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 - x + 2y + 2$ (2) $f(x, y) = \dfrac{2}{3}y^3 + y^2 - x^2 y + x^2$

問題-6-1.

次の関数 $z = f(x, y)$ の極値を求めよ。

(3) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ (4) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x$

5. 陰関数定理 $F(x, y)$ が、$F_y(a, b) \neq 0$ であるとすると、$x = a$ の近くの開区間 $a \in I_\delta = (a - \delta, a + \delta)$ と I_δ 上の関数 $f(x)$ が存在して、$\forall x \in I_\delta$ に対して $F(x, f(x)) = 0$ となる。そのような関数 $y = f(x)$ を**陰関数**という。

考え方. 陰関数の定理は陰関数が存在するための十分条件を与えている。$F(x, y) = 0$ という関係式から y を x について解くことができるための (十分) 条件ということもできる。$y = f(x)$ がこの円の一部を表すグラフになることは $F(x, f(x)) = 0$ を意味する。

考え方. 関数 $F(x, y)$ を $F(x, y) = x^2+y^2-1$ となる関数とする。このとき、$F(x, y) = 0$ となる平面上の図形は円である。この図形上の点 (a, b) の近くで、この図形はある関数のグラフ $y = f(x)$ であるだろうか？それに答えるのが、陰関数定理である。例えば、この場合、$F_y(x, y) = 2y$ である。$F_y(a, b) = 2b \neq 0$ であるような円上の点 (a, b) において、(a, b) の近くの円の一部は、必ず、ある陰関数のグラフになっている。

わかったこと

つまり、$a^2 + b^2 = 1$ かつ $b \neq 0$ である点 (a, b) の近くの円の一部は、$y = f(x)$ という関数のグラフである。(ただし、この $f(x)$ は、a, b に依存して決まる関数である。)

$b > 0$ かつ、$a^2 + b^2 = 1$ となる点 (a, b) には、$y = \sqrt{1 - x^2}$ となる関数が存在し、一方、$b < 0$ かつ、$a^2 + b^2 = 1$ となる点 (a, b) であれば、$y = -\sqrt{1 - x^2}$ となる関数が存在し、それらの関数のグラフは円の一部になっている。

注意

陰関数定理の逆は成り立たない。つまり、$F_y(a, b) = 0$ だとしても、陰関数が存在しないとは言えない。

考え方. 同様に、空間の中の関係式 $F(x,y,z) = 0$ を満たす空間上の図形の点 (a,b,c) が、$F_z(a,b,c) \neq 0$ を満たせば、(a,b,c) の近くのその図形は、ある関数 $z = f(x,y)$ のグラフになっている。

例題-6-2.

(5)　$F(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y^4 - x + y - 2 = 0$ によって定義される平面上の図形は、$(2,-1)$ の近くで陰関数 $y = f(x)$ が存在することを示せ。

(6)　$F(x,y) = y^2 - 4x = 0$ によって定義される平面上の図形の点 (a,b) の近くで、陰関数が存在する (a,b) の条件を求めよ。

問題-6-2.

(7)　$F(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 0$ によって定義される平面上の図形の陰関数 $y = f(x)$ が存在するのはどのようなときか。

問題-6-3.

(8)　$y = f(x)$ を $F(x,y) = 0$ の陰関数とする。恒等式 $F(x, f(x)) = 0$ を用いて $f'(x)$ を F, x を用いて示せ。

問題-6-4.

(9)　$F(x,y) = x^2 - xy^2 - 2 = 0$ の陰関数が (a,b) の近くで存在するとする。このとき、(a,b) でのこの曲線の接線の方程式を求めよ。

宿題-6-1. [極値問題]

$f(x,y) = xy(1-2x-3y)$ とする。関数 $z = f(x,y)$ の極値を以下のようにして求めよ。

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる (a,b) の候補を全て求めよ。

(2) (1) での (a,b) それぞれに対して、ヘッシアン $\det(H(a,b))$ を計算せよ。

(3) (2) で求めた値、および、$f_{xx}(a,b)$ の値を適宜参考にすることで (a,b) が極値であるか、そうでないか判定し、全ての極値を求めよ。

宿題-6-2. [陰関数の定理]
次の問題に答えよ。

(1) $F(x,y)=0$ の陰関数を $y=f(x)$ とするとき、$f'(x)$ を関数 F や F の偏微分を用いて示せ。(上の問題 6.3 と同じ問題であることに注意せよ。)

(2) $F(x,y)$ を $F(x,y)=x^2-4(y^2-y^4)$ と定義し、$F(x,y)=0$ となる関係式を満たす平面上の図形 C を考える。C の点 (a,b) の近くでの陰関数 $y=f(x)$ が存在するための a,b の条件を求めよ。

(3) C 上の点 (a,b) において $F(x,y)=0$ の陰関数 $y=f(x)$ が存在するとき、(1) の公式を用いて $f'(a)$ を a,b を用いて計算せよ。

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB
（blog など更新情報などその他）相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.