

**第7回** ('20年1月7日 : Keywords ... 条件付き極値・重積分)**今日の演習.**

1. 条件付き極値の問題を解けるようにすること。2. 重積分の計算をすること。

考え方. ラグランジュの未定乗数法条件  $g(x, y) = 0$  が成り立つときに、 $f(x, y)$  の極値 (または最大最小) を求める。そのような  $f(x, y)$  の極値のことを条件付き極値という。

- $g_x(x, y) = 0$  かつ  $g_y(x, y) = 0$  となる  $(x, y)$  が存在しないことを示しておく。
- $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$  とおき、 $h(x, y, \lambda)$  の臨界点を求める。そのような臨界点が  $(a, b, \lambda_0)$  が条件付き極値の候補となる。
- その臨界値の最大が最大値となり、最小が最小値となる。

臨界点は、極値の候補であり、最小値および最大値であるとは限らない。ここで用いられるのは次の定理である。

**6. 有界閉集合上の連続関数の最大最小**  $\mathbb{R}^n$  上の有界閉集合上の連続関数には最大最小が必ず存在する。

**例題-7-1.**

$g(x, y) = 0$  のもと、 $f(x, y)$  の最大最小を求めよ。これらの最大最小は、極値でとると仮定する。

(1)  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$   
 $f(x, y) = xy$

(2)  $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$   
 $f(x, y) = x + y$

**問題-7-1.**

$g(x, y) = 0$  のもと、 $f(x, y)$  の最大最小を求めよ。これらの最大最小は、極値でとると仮定する。

(3)  $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$   
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

(4)  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$   
 $f(x, y) = x^3 + \sqrt{2}y$

**例題-7-2.**

次の重積分を求めよ。ただし、 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ である。

$$(5) \iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy$$

$$(6) \iint_D \frac{y^2}{1+x} dx dy$$

**問題-7-2.**

次の重積分を求めよ。ただし、 $D = [0, 1] \times [0, 1]$

$$(7) \iint_D (x+2y)^2 dx dy$$

$$(8) \iint_D \frac{y^2}{1+x} dx dy$$

**例題-7-3.**

次の重積分を求めよ。ただし  $\Delta = \{(x, y) | x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$  とする。

$$(9) \iint_{\Delta} xy^2 dx dy$$

$$(10) \iint_{\Delta} (x+y)^2 dx dy$$

**問題-7-3.**

次の重積分を求めよ。ただし  $\Delta' = \{(x, y) | x, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$  とする。

$$(11) \iint_{\Delta'} e^{2x-y} dx dy$$

(12) 上の積分を積分の順序を入れ替えて計算せよ。

---

**宿題-7-4.** [条件付き極値を求める]

条件  $x^3 - x^2 - y^2 = 0$  のもとで、 $(x+1)^2 + y^2$  の最小値を求めよ。ただし、この条件付き極値問題の最小値は極値において取れることを仮定して良い。

**宿題-7-5.** [重積分]

次の領域  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$  において次の積分を求めよ。

$$\iint_D x^2 y dx dy$$

**宿題-7-6.** [重積分]

次の領域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$  において二通りに重積分せよ。

$$\iint_D y^2 dx dy$$

**質問・その他** 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください。

---

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html>

blog : (<http://mochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB (blog など更新情報などその他)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。