

**第8回** ('19年1月14日 : Keywords ... 重積分・ヤコビアン)

## 今日の演習.

1. ヤコビアンを用いて重積分を計算すること 2. 立体の体積を求めること.

**7. 重積分とヤコビアン**  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  とする.  $\varphi : D' \rightarrow D$  を  $uv$  平面から  $xy$  へ写像を  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$  とする.  $\varphi$  は1対1の写像とする. このとき、 $D$  上の関数  $f(x, y)$  の  $D$  上の重積分は次のように  $D'$  上の重積分として計算できる.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

**例題-8-1.**

$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x + y \leq 1, -1 \leq x - y \leq 1\}$  とするとき、次の重積分を求めよ。

$$\iint_D \frac{e^{x-y}}{1 + (x+y)^2} dx dy$$

**問題-8-1.**

(1)  $D$  を  $(0, 1)$  と  $(1, 0)$  と原点を頂点とする  $xy$  平面上の三角形とする. このとき、重積分

$$\iint_D (x - y)^2 e^{(x+y)^2} dx dy$$

を計算せよ。

(2)  $D = \{(x, y) \mid |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$  のとき、次の重積分を求めよ。

$$\iint_D (x + y)(2x - y) dx dy$$

**例題-8-2.**

重積分

$$\iint_{x^2+y^2 < 1} (a^2 x^2 + b^2 y^2) dx dy$$

を求めよ。

**問題-8-2.**

次の計算をせよ。

$$\iint_{x^2+y^2 < 2ax} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

**例題-8-3.**

$V = \{(x, y, z) | 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq y + z \leq 1, 0 \leq z + x \leq 1\}$  の体積を求めよ。

**問題-8-3.**

半径が  $a$  の球の内部の体積を求めよ。

**問題-8-4.**

$D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$  のとき、以下の積分を計算せよ。

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$$

(Hint: 曲座標表示を用いよ。)

---

**宿題-8-1.** [重積分]

$D = \{(x, y) | 0 \leq x + 2y \leq \pi, 1 \leq 2x + y + 1 \leq \pi\}$  とするとき、重積分

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{2} + y\right) \log(2x + y + 1) dx dy$$

を計算せよ。

**宿題-8-2.** [立体の体積]

$xyz$  空間において、円柱  $x^2 + y^2 \leq a^2$  と、半径  $2a$  の球の内部によって囲まれる部分の立体の体積を求めよ。

宿題-8-3. [ $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  の値]

平面上で以下の積分を求めよ。

$$\iint e^{-x^2-y^2} dx dy$$

**質問・その他** 今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください。

---

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html>

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

Twitter: BasicMathIIB (blog など更新情報などその他)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。