微積分演習F

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回（'20 年 1 月 21 日：Keywords ⋯ 広義重積分・積分と微分の順序交換）

今日の演習.

1. 重積分の計算をしよう。 2. 積分と微分の順序交換をすることで計算を行おう。

---

8. 広義重積分 $\{D_i | i = 1, 2, \cdots\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界閉領域の族とする。このとき、$D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ が成り立ち、$D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$ であり、D に含まれる任意の有界閉集合がある D_i に含まれるとする。今、$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ において、$\lim_{i\to\infty} \iint_{D_i} f(x, y)dxdy$ がそのような有界閉集合族によらず有界な値に収束するとするとき、その極限値を $\iint_D f(x, y)dxdy$ と表し、$f(x, y)$ は D 上で **(広義) 積分可能**という。

<u>考え方.</u> 次のような広義重積分の可能性には次の定理を用いる。
(定理 1)D を上のような平面上の領域とする。$f(x, y)$ が D 上で連続とする。$g(x, y)$ が D 上で連続で、
(i) $|f(x, y)| \le g(x, y)$ かつ、(ii) $g(x, y)$ は D 上で積分可能とする。
このとき、$f(x, y)$ も D で積分可能である。
(定理 2)D を上のような条件を満たす平面上の領域とする。$f(x, y)$ が D で非負となる連続関数とする。上の条件を満たす有界閉集合領域族 $\{D_i | i = 1, 2, \cdots\}$ が存在して $\lim_{i\to\infty} \iint_{D_i} f(x, y)dxdy$ が有界な値に収束するなら、$f(x, y)$ は D で積分可能である。

9. 積分と微分の順序変換 (有界閉区間の場合)

$I = [a, b] \times [c, d]$ を $\mathbb{R}^2$ の有界閉区間とし、$f(x, y)$ は I で定義された連続関数で、次の 2 条件 (A),(B) を満たしているとする：
(A) 関数 $f(x, y)$ は $y \in [c, d]$ について偏微分可能である。
(B) 偏導関数 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ は I で連続である。
このとき、関数

$$F(x, y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

は微分可能であって

$$\frac{dF(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

が成立する。
(無限区間の場合)
$J = [a, \infty) \times (\alpha, \beta)$ において、$f(x, y)$ は J で定義された連続関数で、次の 2 条件 (A),(B),(C),(D) を満たしているとする：
(A) 関数 $f(x, y)$ は $y \in (\alpha, \beta)$ について偏微分可能である。
(B) 偏導関数 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ は J で連続である。
(C) 任意の $t \in (\alpha, \beta)$ に対して、x の関数として $f(x, t)$ は $[a, \infty)$ において広義積分可能である。
(D) $[a, \infty)$ において広義積分可能な (t によらない) 関数 $\varphi(x)$ が存在して、任意の $t \in (\alpha, \beta)$ お

よび $x \in [a, \infty)$ に対して、

$$|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}| \le \varphi(x)$$

が成り立つ。このとき、関数

$$F(x,y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$

は微分可能であって任意の $t \in (\alpha, \beta)$ に対して

$$\frac{dF(y)}{dy} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

が成立する。

例題-9-1.

次の広義重積分

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

を次の2通りの方法で計算をせよ。

(1)　x, y の累次積分を使って計算する。

(2)　極座標表示を用いて計算する。

これによって、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

問題-9-1.

$$4\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} x^{2p-1} y^{2q-1} dxdy$$

を2通りに計算することで、$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}$ を証明せよ。

例題-9-2.

実数 t に対して、関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_0^1 e^{tx} dx$$

として定義する。このとき、$\frac{d^n F}{dt^n} = \int_0^1 x^n e^{tx} dx$ であること示せ。

問題-9-2.

n を任意の正の整数とし、t を任意の正の実数とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^1 x^t (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(t+1)^{n+1}}$$

例題-9-3.

次の等式を示せ。

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx} dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

問題-9-3.

公式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて、次の等式を示せ。

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$$

復習-9-1. [広義積分]

次の広義積分が収束するか調べよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x}} dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx$

復習-9-2. [連続・全微分可能]

次の関数 $f(x,y)$ は連続であるか、また全微分可能であるか？

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

復習-9-3. [接平面]

次の (a,b) での接平面の方程式を求めよ。$f(x,y) = 3x^2y + xy$

復習-9-4. [極値]

次の関数の極値を求めよ。

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x$$

復習-9-5. [条件付き極値]
$2x^2+y^2-1=0$ の条件のもと、$f(x,y)=x+y$ の極値を求めよ。

復習-9-6. [重積分]
D を $y=x^2$ と $x=y^2$ で囲まれた領域を D とする。

$$\iint_D (y^2-x)dxdy$$

を求めよ。

復習-9-7. [重積分]
D を $x^2+y^2\leq 1$ かつ $x\geq 0$ を満たす領域とするとき、

$$\iint_D xdxdy$$

を求めよ。

質問・その他　今日の微積分学の演習における質問、また勉強中迷ったことがあれば、書いてください.

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/19/bis.html`
blog：(`http://motochans.blogspot.jp/`)
（授業内容など）
Twitter: BasicMathIIB（blog など更新情報などその他）
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.