微積分演習F 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回（'20 年 1 月 21 日：Keywords ⋯ 宿題解答）

宿題-8-1. [重積分]

$D=\{(x,y)|0\le x+2y\le\pi, 1\le 2x+y+1\le\pi\}$ とするとき、重積分

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{2}+y\right)\log(2x+y+1)dxdy$$

を計算せよ。

(解答) $u=x+2y$, $v=2x+y+1$ とおく。このとき、x,y を u,v について解くと、$x=\frac{1}{3}(-u+2v-2)$, $y=\frac{1}{3}(2u-v+1)$ となる。このヤコビアンの絶対値は $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=|\det\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}|=\frac{1}{3}$ である。よって、重積分は次のように計算出来る。ただし、$D'=\{(u,v)|0\le u\le\pi, 1\le v\le\pi\}$ である。

$$\begin{aligned}
&\iint_D \cos\left(\frac{x}{2}+y\right)\log(2x+y+1)dxdy\\
=&\iint_{D'}(\cos\frac{u}{2}\log v)\frac{1}{3}dudv=\frac{1}{3}\int_0^\pi\int_1^\pi\cos\frac{u}{2}\log vdudv\\
=&\frac{1}{3}\int_0^\pi\cos\frac{u}{2}du\int_1^\pi\log vdv=\frac{1}{3}\left[2\sin\frac{u}{2}\right]_0^\pi[x\log x-x]_1^\pi\\
=&\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(\pi\log\pi-\pi+1)=\underline{\frac{2}{3}(\pi\log\pi-\pi+1)}
\end{aligned}$$

宿題-8-2. [立体の体積]

xyz 空間において、円柱 $x^2+y^2\le a^2$ と、半径 $2a$ の球の内部によって囲まれる部分の立体の体積を求めよ。

(解答) 重積分を用いて示す。求める体積は、対称性から $z\ge 0$ の部分の体積の 2 倍であり、次のように計算出来る。

$$\begin{aligned}
&2\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy\\
=&2\iint_{r\le a}\sqrt{4a^2-r^2}rdrd\theta=2\pi\int_{s\le a^2}\sqrt{4a^2-s}ds=2\pi\left[\frac{-2}{3}\sqrt{(4a^2-s)^3}\right]_0^{a^2}\\
=&\frac{-4\pi}{3}(\sqrt{(4a^2-a^2)^3}-8a^3)=\underline{\frac{4}{3}(8-3\sqrt{3})\pi a^3}
\end{aligned}$$

(解答 2) 回転体の体積の公式を用いる。$x^2+y^2\le a^2$ かつ $0\le z\le\sqrt{3}a$ を満たす円柱と $\sqrt{4a^2-x^2}$ の z 軸を軸とした回転体に分けられる。この円柱の体積は

$\sqrt{3}aa^2\pi = \sqrt{3}a^3\pi$ であり、次のように計算出来る。

$$\begin{aligned}\pi\int_{\sqrt{3}a}^{2a}(4a^2-x^2)dx &= \pi\left[4a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{3}a}^{2a}\\ &= \pi(8a^3-4\sqrt{3}a^3-\frac{1}{3}\left(8-3\sqrt{3})\right)a^3\\ &= \left(\frac{16}{3}-3\sqrt{3}\right)\pi a^3\end{aligned}$$

よって、$\left(\frac{16}{3}-2\sqrt{3}\right)\pi a^3$ である。実際はこの体積の 2 倍であるから、求める体積は $\underline{2\left(\frac{16}{3}-2\sqrt{3}\right)\pi a^3}$ となる。

(解答 3) 求める体積がこの円柱の外側と考えるなら、球の体積は $\frac{32}{3}\pi a^3$ であるから、体積は以下のように計算出来る。

$$\frac{32}{3}\pi a^3-\left(\frac{32}{3}-4\sqrt{3}\right)\pi a^3 = \underline{4\sqrt{3}\pi a^3}$$

注：問題文の読み方によって 2 通りに読めるので、どちらも正解にします。

宿題-8-3. [$\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値]

平面上で以下の積分を求めよ。

$$\iint e^{-x^2-y^2}dxdy$$

(解答)x, y 軸に平行に累次積分することで次を得る。

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy\\ &= 4\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2\end{aligned}$$

$x^2 = s$ とすると、$ds = 2xdx = 2\sqrt{s}dx$ であるから、

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^\infty e^{-s}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = \int_0^\infty e^{-s}s^{-\frac{1}{2}}ds = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

よって、この積分は、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$ である。

極座標を用いて計算をするなら、

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \pi[-e^{-r}]_0^\infty = \underline{\pi}$$

となる。