前回の補足

2019年4月20日　5:36

タイプ

Examples

S_2 : e, $(1,2)$, 2種

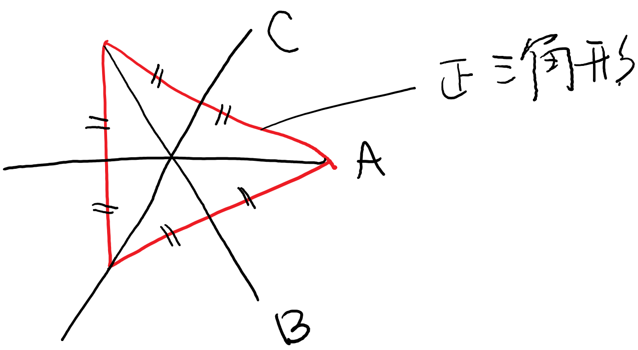
S_3 : e, $(1,2)$, $(1\,2\,3)$, 3種

S_4 : e, $(1,2)$, $(1,2,3)$, $(1\,2\,3\,4)$,
$(1,2)(3,4)$ 5種

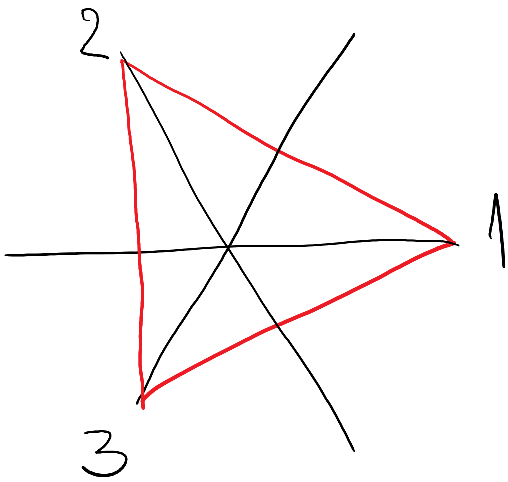
S_5 : e, $(1,2)$, $(1\,2\,3)$, $(1\,2\,3\,4)$, $(1,2\,3\,4\,5)$
$(1\,2)(3\,4)$, $(1\,2)(3\,4\,5)$ 7種

鏡映群

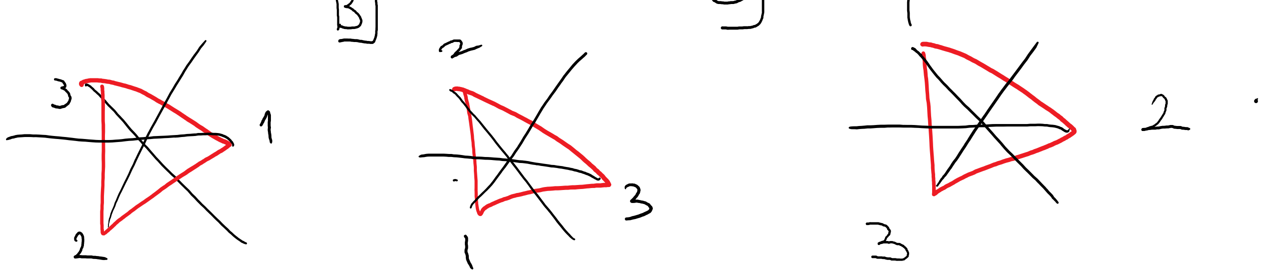
2019年4月9日　18:58



A, B, Cに関する鏡映



A]　B]　C]



3角形の鏡映 ⟶ {1, 2, 3}の入れかえ

対称変換

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

対応

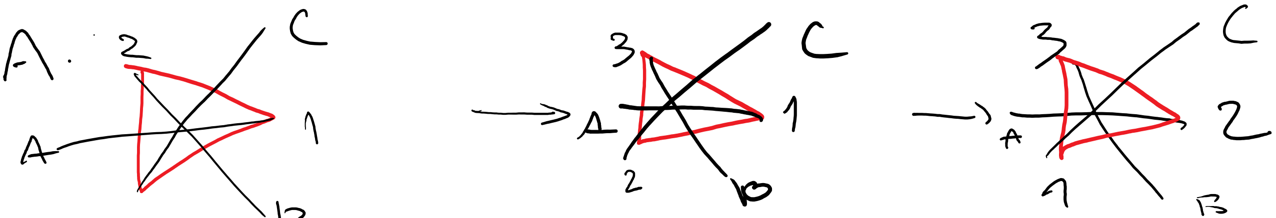
2019年4月11日　12:18

$A \longmapsto \sigma_2$　　$B \longmapsto \sigma_2\sigma_1\sigma_2$
$= \sigma_1\sigma_2\sigma_1$

$C \longmapsto \sigma_1$

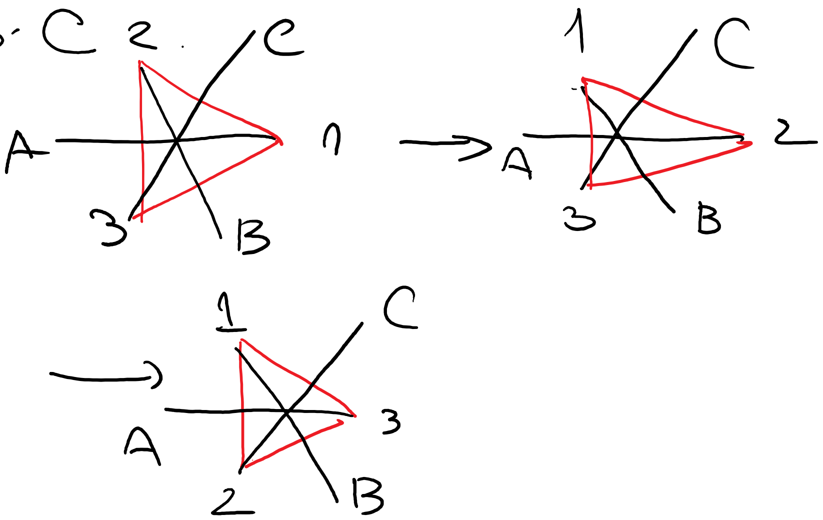
積はうまくいっているか？
（同型対応か？

B·A.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2\sigma_1 = \underbrace{\sigma_2\sigma_1\sigma_2}_{B} \cdot \underbrace{\sigma_2}_{A}$$

B·C



Q7. この場合もうまくいっているか？

$$
\begin{array}{ccc}
R_3 & & \\
\| & \text{同型} & \\
f : \{\text{三角形の鏡映}\} & \longleftrightarrow & S_3 \\
A, B, C, AB, \cdots & & \sigma_1, \sigma_2, \cdots
\end{array}
$$

$$f(A) = \sigma_2$$

$$f(B) = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

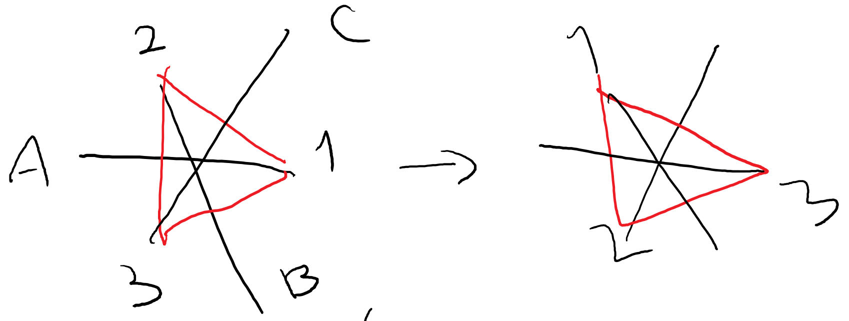
$$f(C) = \sigma_1$$

$$f(X \cdot Y) = f(X)f(Y)$$

結論

$\boxed{\text{正3角形の対称性} = \text{あみだくじの置換}}$

いろいろな対称性
があみだくじのなす
群によってかける.



回転

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2$$

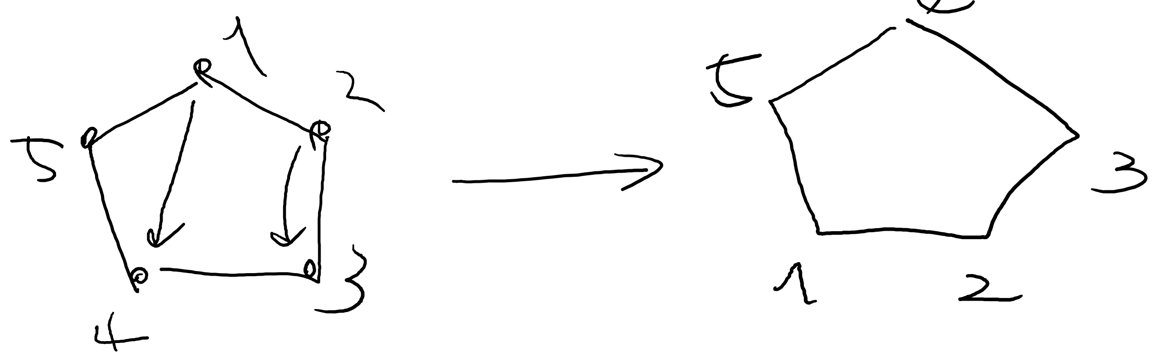
正3角形の鏡映 $\xrightarrow{\text{合成}}$ 正3角形を保つ変換

回転含む

↑ 最初の結論みたい.

R_n：正n角形を保つ変換

↑ 正の対称性



Q.8 R_nはいくつあるか?

1,2‥nはとなりの関係が決っている

グラフ理論

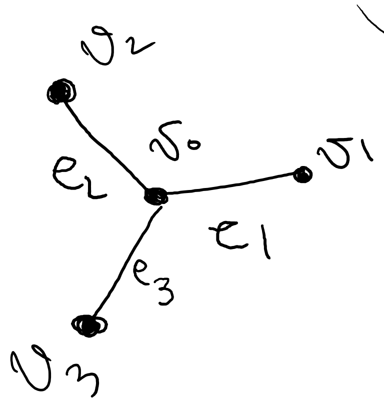
2019年4月11日 14:58

グラフ： $\{V, E\}$

E：辺の集合

V：頂点の集合

例



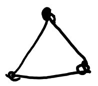
$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$

$e_i = v_0 v_i$

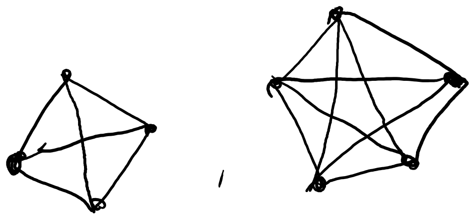
次数

$v \in V$, $\deg(v)$ = vから出発する辺の数

例  ：各頂点が次数2のグラフ

例 完全グラフ K_n：頂点：nこ。

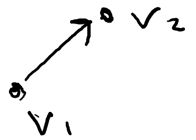
辺：すべての頂点を結ぶ。



辺どうしは交っていてよい。

正則グラフ…すべての$v \in V$で $\deg(v)$ 一定

向き



各辺に向きがある場合

有向グラフという

二部グラフ

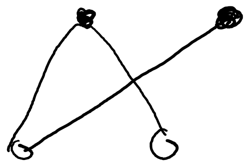
2019年4月15日　8:53

二部グラフ

$V = A \sqcup B$

↑交わりなし

E: 全ての辺は Aの頂点とBの頂点を結ぶ



A

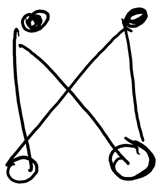
B

二部グラフ

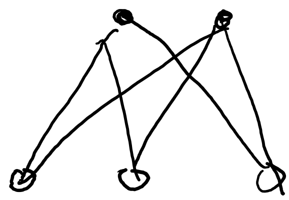
$K_{n,m}$: 完全二部グラフ

$(\#A = n, \#B = m)$

$K_{2,2}$



$K_{2,3}$



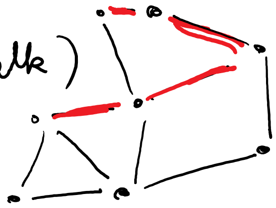
グラフ理論の応用

ネットワーク（インターネットなど）

グラフ

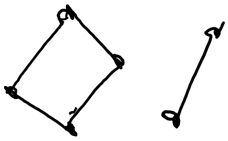
2019年4月14日 17:18

歩道(walk)



連結した辺のこと

連結グラフ　任意の頂点がある歩道によって結ばれる。



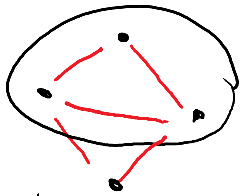
← 連結でないグラフ。

多重辺

ループ

シンプル…ループなし。

サイクル(閉路)



サイクル

サイクルでない。

内周…グラフGの最短のサイクルの長さ。

$\{V_1, E_1\}$, $\{V_2, E_2\}$ がグラフ。

G_1　　G_2

G_1とG_2が同形

$V_1 \to V_2$ 全単射において

$E_1 \to E_2$ (全単射) となる

グラフ理論の公式

2019年4月15日　　5:49

正則グラフの公式

頂点数 n，次数 d，辺の数 m

$$\frac{nd}{2} = m$$

$\frac{n(n-1)}{2} = n$ に完全

よって、頂点数が奇数，次数が奇数の正則グラフは存在しない。

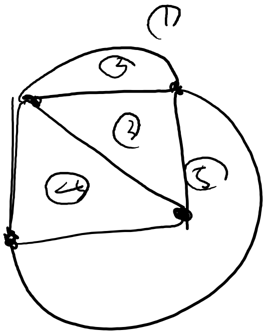
オイラーの公式

G：平面グラフ，n：Gの頂点の数

m：Gの辺の数，f：Gの領域の数

$$n - m + f = 2$$

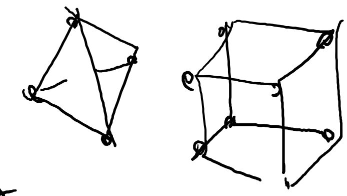
2019年4月15日　7:18



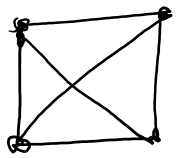
$n=4,\ m=7,\ f=5$

$4-7+5=2$

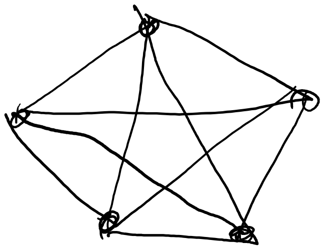
Q8 プラトングラフは平面グラフであるなぜか？



Q9 K_4は平面グラフである



定理 K_5は平面グラフではない。



K_5が平面グラフとする。

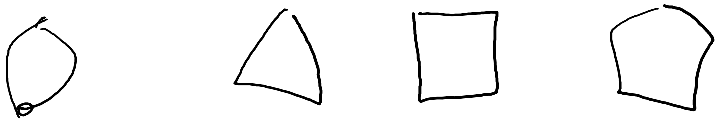
$n=5,\ m=\frac{5\cdot 4}{2}=10,\ d=4$

$5-10+f=2$

$f=7$

K_5が平面的でない証明

2019年4月15日　8:08



	2	3	4	5 …
#	0	m_3	m_4	m_5

K_5はシンプルより $m_2=0$

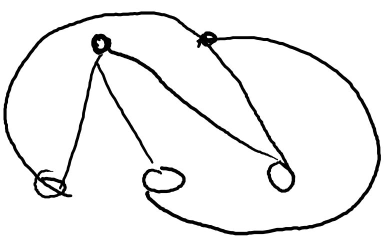
$$3m_3+4m_4+5m_5+\cdots$$
$$=2m$$

Q. なぜか説明せよ。

$$2m \geq 3(m_3+m_4+\cdots)$$
$$=3f$$
$$2m \geq 3f$$

$m=10$　$f=7$　矛盾//

$K_{2,3}$は平面グラフ



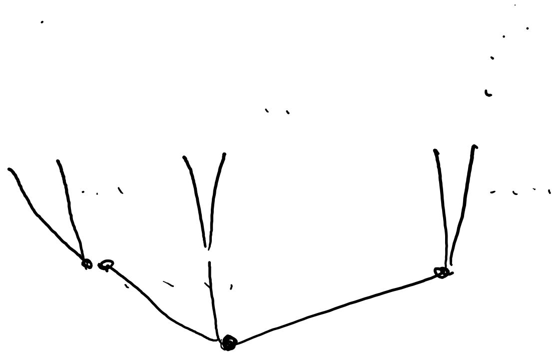
Q $K_{3,3}$は平面的でないことを示せ。

ムーアグラフ

2019年4月15日　9:07

定義(ムーアグラフ)

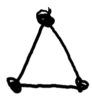
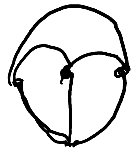
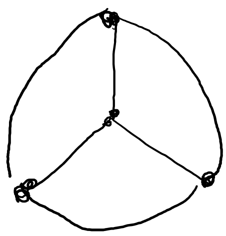
次数d, 内周2g+1の正則グラフ

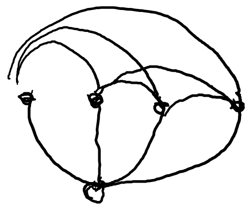
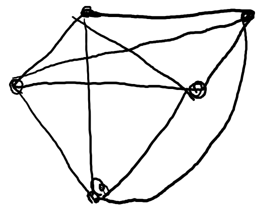


頂点数 $n = 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{g-1}$

$g=1$

$n = d+1$

$d=2$  $d=3$  = 

$d=4$  =  ...

Q1.1 正則グラフなら

$$2\underbrace{n}_{\text{頂点数}}\underbrace{d}_{\text{次数}} = \underbrace{m}_{\text{辺の数}}$$

であること を示せ。

問題 12

2019年4月18日　　5:56

Q.11 $g=1$ のとき，平面グラフとなるのは $n=2,3$ のときのみであることを示せ。

オイラーの等式，前のQ，内周の定義用いる
（不等式見積りを誤るとできない）

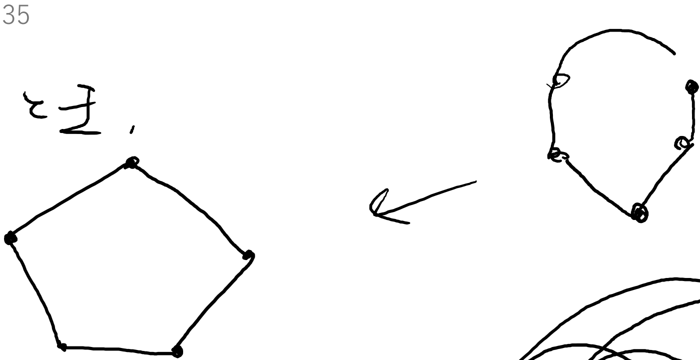
$g=2$ のとき
$n=1+d^2$

定理 内周5，次数がdのムーアグラフが存在するなら $d=2,3,7,57$

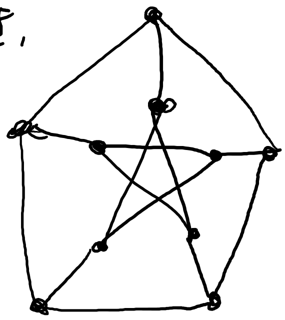
ムーアグラフ

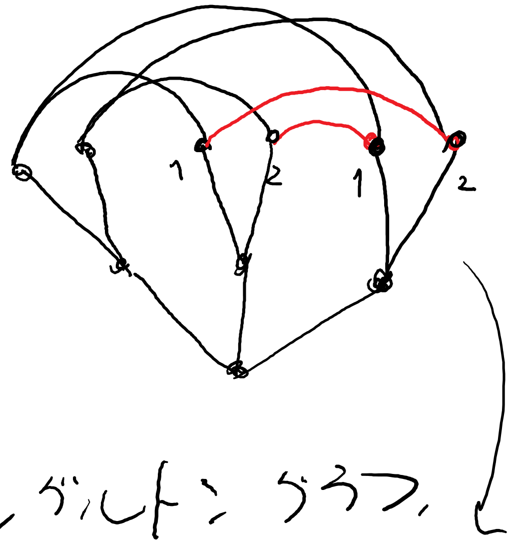
2019年4月20日　10:35

d=2のとき,



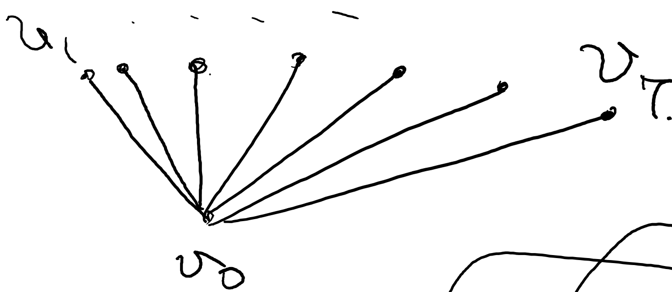
d=3のとき,

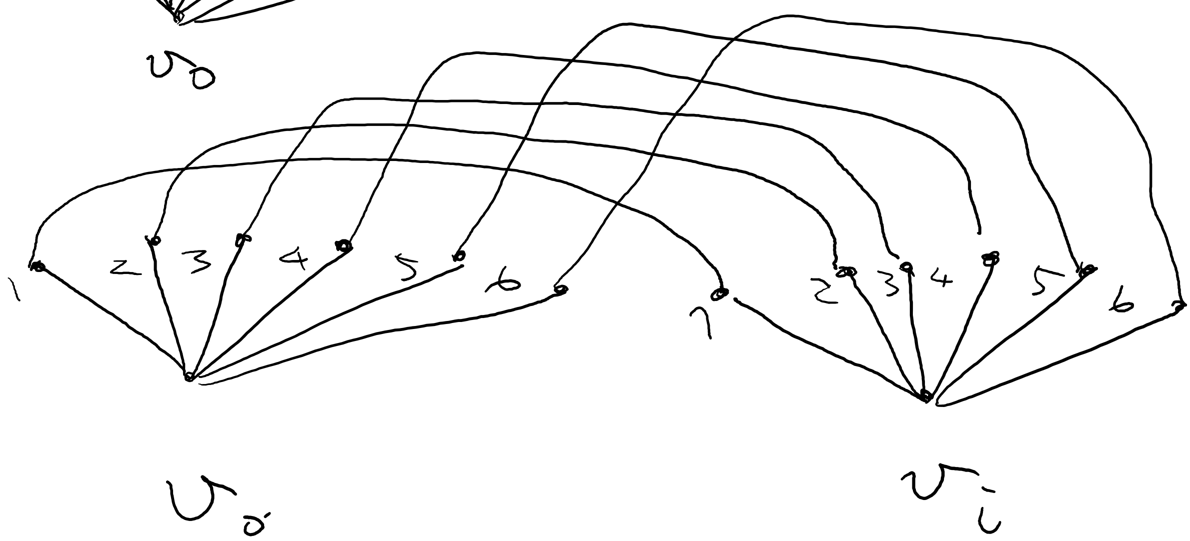




d=7のとき, ホフマン・シングルトン グラフ,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \in S_2$$





$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\end{pmatrix}$$

2019年4月20日　10:42

1 2 3 ⋯ 6 の置換 $\sigma_{ij} \in S_6$ になる。

いくつかの条件をみたす。

- k は k にうつらない。数字は固定されない。
-
- ⋮ 他にも⋯

$$(i,j) \longrightarrow \sigma_{ij} \in S_6$$

が外部自己同型になっている！

$d=57$ のムーアグラフが存在するかどうか知られていない。