群とは何か？

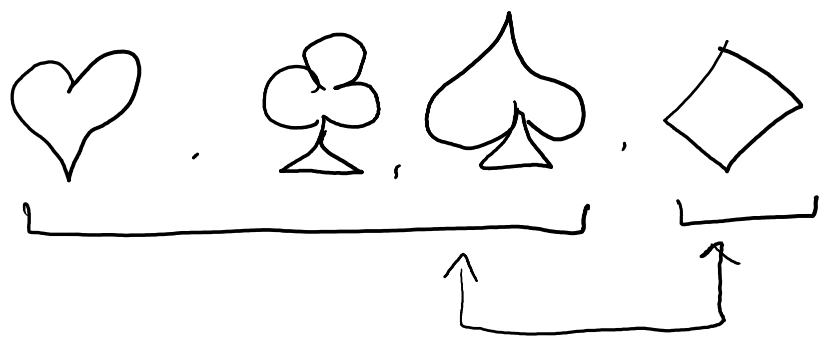
2019年4月11日　12:31

- 線対称・点、対称 は どのようなメカニズム？

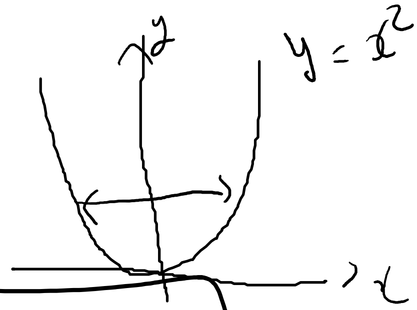
対称性を記述する ― 群によって記述できる

- 群によって2つの対称性を比較できたりする。

例　トランプのスート（対称性）



このグループ分けは何が違う？

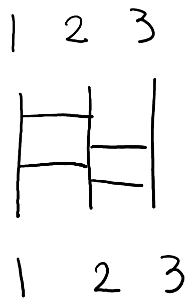


結論

対称性とは（数学的）構造を保つ変換のこと

あみだくじ

2019年4月8日　20:10



1 2 3
↓ ↓ ↓
2 3 1

1 2 3 4
↓ ↓ ↓ ↓
3 1 2 4

性質

① 異なる数は異なる数字にいく（単射）

② 1〜nのすべての数に行き渡っている（全射）

① + ② = 全単射

↓をなくして

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とかく。

行き先

要するに1〜nの並び換え

↑置換という

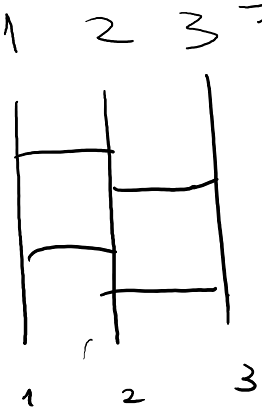
置換

2019年4月8日　20:15

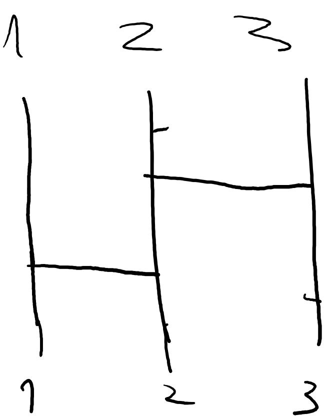
公式

$$\boxed{\#\{1〜n\text{の置換}\} = n!}$$ [illegible]

集合の要素(元)の数.



は



違うあみだくじ

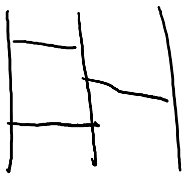
だが

同じ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ を表している.

1〜nの置換　を　S_n　とかく.

$\{n\text{本のあみだ}\} \longrightarrow \{\text{置換}\}$

本質だけ取り出す.
(抽象化)



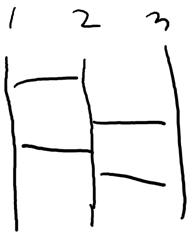
$\longrightarrow$ $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$

$\longleftarrow$

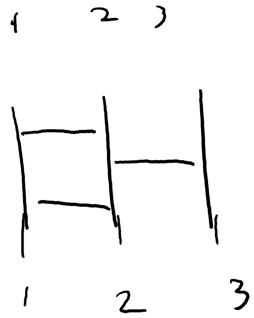
右よみ

合成

2019年4月9日 18:14



$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aとβの合成という。

次のは左に並べる

注 $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$ である

Q! 確めよ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ 恒等置換という。

単位元という

$= e$ とかく.

合成の性質

2019年4月9日　18:14

A：置換

- $e \cdot x = x \cdot e = x$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ i_1 & i_2 & \cdots & \end{pmatrix} = x$ に対して

  $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix} = y$ は

  $$xy = yx = e$$
- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

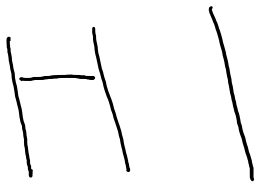
置換群

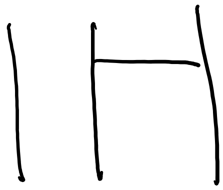
2019年4月9日　18:58

このような積をもつ置換全体 S_n を n 次対称群(置換群)という。

置換群の元の表し方.

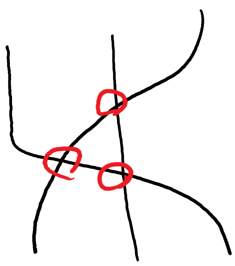
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2$$



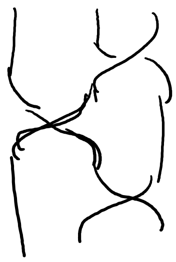


置換 ⟶ あみだ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



→



=

$= \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

となる.

S_3の表示

2019年4月10日　17:38

Q.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \sigma_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2 \sigma_1$ を証明せよ.

$$S_3 = \left\{ e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1 \right\}$$

とかける.

Q.2.5 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

を確かめよ.

対称群の基本関係式

2019年4月15日　　5:00

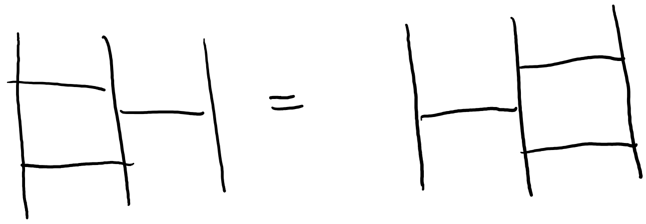
$\sigma_i = (i, i+1) \quad i = 1 \cdots n-1$

隣りある互換

対称群の基本関係式

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\mathrm{i}) & \sigma_i^2 = e & i = 1 \cdots n-1 \\ (\mathrm{ii}) & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1 \cdots n-2 \\ (\mathrm{iii}) & \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & |i-j| \geq 2 \end{array}}$$

(i) 

(ii)  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) 

巡回置換表示

2019年4月11日　14:11

S_nの表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & & i_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{1 \to i_1 \to i_{i_1} \to i_{i_{i_1}} \cdots \to 1}_{\text{位数 } r_1}$$

$$\underbrace{2 \to i_2 \to i_{i_2} \to \cdots \to 2}_{\text{位数 } r_2}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$1 \to 2 \to 4 \to 1$　位数 3

$3 \to 5 \to 3$　位数 2

$$= \underbrace{(1\ 2\ 4)}_{\text{長さ3の巡回置換}}\underbrace{(3\ 5)}_{\text{長さ2の巡回置換}}$$

とかく.

長さ2の巡回置換 ← 互換という

Q3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

を交わらない巡回置換で表せ

置換の共役

2019年4月13日　　14:56

$$(1,2)(1\,3)(2\,4)(1\,2) = (2\,3)(1\,4)$$

$$(2\,1\,3)(1\,3)(2\,4)(1\,2\,3) = (3\,2)(1\,4)$$

$$(1\,4\,3\,2)(1\,3)(2\,4)(1\,2\,3\,4) = (4,2)(1,3)$$

公式

$$\sigma^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \cdots & n \\ i_{\sigma(1)} & i_{\sigma(2)} & \cdots & i_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$$

この2つは、共役という。

定理 2つの置換が共役ならば、巡回置換表示は同じタイプ。

$$(1\,3)(2\,4) \sim (2\,3)(1\,4)$$

共役

$$(\cdot\ \cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot) \sim (*\ *\ *)(*\ *)$$

相異なる　　　　相異なる。

タイプ

2019年4月14日　　16:12

$n=3$　$(*,*)$, $(*,*,*)$　2種

$n=4$　$(*,*)$, $(*,*,*)$, $(*,*,*,*)$

$(*,*)\cdot(*,*)$　4種

$n=5$　$(*,*)$, $(*,*,*)$, $(*,*,*,*)$, $(*,*,*,*,*)$

$(*,*)\cdot(*,*)$, $(*,*)\cdot(*,*,*)$　6種

本当は e のタイプもあるからさらにそれぞれ＋1種増える．

Q4．S_n のタイプは何種類あるか？

（難しいかも）

内部自己同型

2019年4月13日　　17:03

$$f_\sigma : S_n \longrightarrow S_n$$
$$\in$$
$$x \longmapsto \sigma^{-1} x \sigma$$

$x \to \sigma^{-1} x \sigma$ の意味

内部自己同型

~~全単射~~ & Q6

~~自分自身~~ への写像

$$f_\sigma(x) = f_\sigma(y)$$
$$\Longleftrightarrow \sigma^{-1} x \sigma = \sigma^{-1} y \sigma$$
$$\Longleftrightarrow x = y \quad (\text{単射})$$

Q5 f_σは全射であることを示せ。

Q6 $f_\sigma(x) f_\sigma(y) = f_\sigma(xy)$ を示せ。

S_6 の外部自己同型

2019年4月13日　17:14

$K_1=(12)(34)(56)$

$K_2=(16)(24)(35)$

$K_3=(14)(23)(56)$

$K_4=(16)(25)(34)$

$K_5=(13)(24)(56)$ 　とおこう.

$K_1K_2K_1=(12)(34)(56)(16)(24)(35)(12)(34)(56)$

$=(13)(25)(46)$

$K_2K_1K_2=(16)(24)(35)(12)(34)(56)(16)(24)(35)$

$=(13)(25)(46)$

つまり, $K_1K_2K_1=K_2K_1K_2$.

$K_1K_3K_1=K_3K_1K_1$

$K_2K_4=K_4K_2$ 　……

「などの $\sigma_1 \cdots \sigma_5$ がみたすべき関係式と同じ関係式をみたす」

Q7. $K_1 \cdots K_5$ が対称群の基本関係式をみたすことを示せ。

$\sigma_1 \cdots \sigma_5$ を $K_1 \cdots K_5$ に換えて考えよ.

ということ.

外部自己同型

2019年4月14日　16:55

内部ではないということ

$\psi : S_6 \to S_6$ を
$\quad\;\; \rotatebox{90}{$\in$}$
$\quad\;\; \sigma_i \to \kappa_i$ として

S_6 の自己同型写像が作れる。

これは内部自己同型ではない

なぜなら、互換が互換に移っていない。

定理 S_n 上の外部自己同型は $n=6$ のとき以外存在しない