線形代数III演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第1回（'12年12月5日：Keywords ··· 数ベクトル空間の線形写像，部分空間，像，核）

$\mathbb{K}$ は複素数及び実数として考えてよい．$\mathbb{K}^n$ は成分が $\mathbb{K}$ の数ベクトル空間（縦ベクトル）を表す．$M(m,n,\mathbb{K})$ を成分が $\mathbb{K}$ の $m\times n$ 行列を表し、$M(n,\mathbb{K})=M(n,n,\mathbb{K})$ とする．$\mathbb{K}^n$ と $\mathbb{K}^m$ の間の線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$ とする．

問題 1-0. [2学期までの復習]

(1) 次の連立一次方程式を解け。

(a) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+y+z+w=8 \\ 6x+2y-w=-2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+3y-3z=-5 \\ -y+z=3 \\ 3x+2y-2z=0 \end{cases}$

(2) 次の行列の rank を計算せよ．

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

問題 1-1. [線形写像について]

(1) 次の写像は線形であるか？線形であるかどうか理由を付して説明せよ．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=xy$ (b) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix}$ (c) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+y^2+1 \\ 2x \end{pmatrix}$

(2) 線形写像 $f:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$ が $f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす．このとき、$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の値を求めよ．

(3) 線形写像 $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ を決定するためには $f(\mathbf{e}_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ の行先を全て決めれば一通りに決まることを示せ．ここで $\mathbf{e}_i$ は教科書 P.70 にある標準基底のこととする．

問題 1-2.[線形写像と行列]

$f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2,\mathbb{K}^2)$ に対して $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{K})$ を対応させることで $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2,\mathbb{K}^2)$ と $M(2,\mathbb{K})$ に1対1対応を作ることができる．

$f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2,\mathbb{K}^2)$ に対して、$f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を対応させるとすると、$\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^2,\mathbb{K}^2)$ と $M(2,\mathbb{K})$ の1対1対応が作れることを示せ.

問題 1-3.[像と核]

(1) f を線形写像 $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 3x_1-x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とするとき、f の像 $\mathrm{Im}(f)$ と核 $\mathrm{Ker}(f)$ を求めよ.

(2) f を線形写像 $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}$ とするとき、f の像 $\mathrm{Im}(f)$ と核 $\mathrm{Ker}(f)$ を求めよ.

問題 1-4.[部分空間]

(1) V, W を $\mathbb{K}^n$ の部分空間とする．このとき、$V \cap W$ も $\mathbb{K}^n$ の部分空間であることを示せ.

(2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．このとき、$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ を含むような $\mathbb{K}^2$ の部分空間は $\mathbb{K}^2$ のみであることを示せ.

問題 1-5.[いくつかのベクトルで張られる部分空間]

(1) $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{K}^n$ とする．$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \rangle = \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle$ が成り立つならば、a_m は $a_1, \cdots, a_{m-1}$ の一次結合で書けることを示せ.

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \in \mathbb{K}^n$ を 1 次独立なベクトルとする．$\langle a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \rangle \neq \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle$ が成り立つならば、$a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m$ も 1 次独立であることを示せ.

問題 1-6.[$\mathrm{Im}(f)$]

線形写像 f を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ とする．A の縦ベクトルを $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ とすると f の像 $\mathrm{Im}(f)$ は $\langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a_n} \rangle$ に等しいことを示せ.

課題 1-1.[連立一次方程式]

次の連立一次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = -1 \end{cases}$

課題 1-2.[線形写像]

(1) 線形写像 $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ が $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を満たす．このとき、$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$ に対して $f(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{x})$ と定義する．このとき、f は線形写像であることを示せ.

(3) $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^3$ に対して $g(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{a}_1 \mathbf{x}\, \mathbf{x})$ と定義する．このとき、g は線形写像でないことを示せ.

課題 1-3.[像と核]

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ となる線形写像 f の像と核を求めよ.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html
ツイッター：**BasicMathIIB (https://twitter.com/BasicMathIIB)**

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.