

## 第2回 ('12年12月19日：Keywords・・・いくつかのベクトルで張られるベクトル空間)

$\mathbb{K}$  は複素数及び実数として考えてよい。 $\mathbb{K}^n$  は成分が  $\mathbb{K}$  の数ベクトル空間 (縦ベクトル) を表す。

[一次関係] ベクトル  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  の一次関係とは、 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$  となる関係式のことである。

[一次独立] ベクトル  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が一次独立とは、 $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$  ならば  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  を満たすことをいう。つまり、それらのベクトルには非自明な一次関係が存在しないことをいう。

### 問題 2-1. [基本変形]

$A$  に基本変形 (1),(2),(3) を施した行列を  $A'$  とする。このとき、 ${}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  に対して、下が成り立つことを示せ。

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

基本変形 (1), (2), (3) は教科書 P.34 を見よ。

### 問題 2-2. [一次関係]

$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  の間の非自明な一次関係を求めよ。

### 問題 2-3. [一次独立・一次従属]

次のベクトルは一次独立か、一次従属か？

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

### 問題 2-4. [一次独立なベクトルの最大数]

- (1) 下の行列の縦ベクトルの中から一次独立なベクトルを最大数選び出せ。
- (2) (1) 以外のベクトルを一次独立なベクトルの一次結合で表せ。

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & -1 \\ 7 & -1 & -15 & -2 \\ 6 & -1 & -13 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -2 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

### 問題 2-5. [ベクトル空間]

$\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$  を  $\mathbb{K}^n$  から  $\mathbb{K}$  への線形写像全体を表す。このとき、 $\text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$  はベクトル空間であることを示せ。

### 課題 2-1.[一次独立・一次従属]

次の行列の縦ベクトルは一次独立か、一次従属か。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

### 課題 2-2.[一次独立なベクトルの最大個数]

次のベクトルの中から一次独立なベクトルを最大個数とり出せ。また、その他のベクトルをそれらの位置結合で表せ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 課題 2-3.[線形写像]

$\text{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$  を  $\mathbb{K}^2$  から  $\mathbb{K}$  への線形写像全体を表す。このとき、 $\text{Hom}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$  はベクトル空間であることを示せ。

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html>  
ツイッター : BasicMathIIB (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)  
質問等があれば気軽にメールしてください。携帯からでも OK です。