線形代数III演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'13 年 1 月 9 日：Keywords $\cdots$ ベクトル空間、基底）

[(抽象) ベクトル空間] 数ベクトル空間とは限らない一般のベクトル空間のこと．見かけ、ベクトルではなくても、適当な加法とスカラー倍があり、ベクトル空間としての性質 (教科書 134,135) を満たすとき (抽象) ベクトル空間とみなす本来はスカラー倍 $\mathbb{K}$ がどの集合か指定しないと意味がない．例えば実ベクトル空間か複素ベクトル空間か．(問題 3-1(4)) 一般にベクトル空間のスカラー倍は体 (教科書 111) であれば何でも構わない．そのとき、"体 $\mathbb{K}$ 上の"という言い方をする．他の体の例. 有理数体 $\mathbb{Q}$、有理関数体など.

[基底] ベクトル空間 V において、ベクトル $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ が基底であるとは、$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ が 1 次独立であり、任意の $\mathbf{v} \in V$ がそれらのベクトルの 1 次結合で表されること．つまり $\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ となる．このとき、V は有限生成という.

[1 次独立なベクトルの最大数] ベクトルの集合 $S = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ において k が 1 次独立なベクトルの最大数であるとは、S の中のある k 個のベクトルが 1 次独立であり、S の中の任意の $k+1$ 個のベクトルは 1 次従属であることである.

[多項式] $\mathbb{K}$ 係数の多項式全体を $\mathbb{K}[X]$ で表す．各項は有限個の単項式 X^n しか含まれず一般の級数は多項式ではない.

[n 次以下の多項式] $\mathbb{K}[X]_n$ を係数が $\mathbb{K}$ で、n 次以下の多項式全体の集合とする.

問題 3-1. [ベクトル空間・基底]

(1) $\mathbb{C}[X]_3$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となることを示せ．またそのベクトル空間の基底を 1 つ求めよ.

(2) V を有限生成ベクトル空間とする．このとき、${}^\forall\mathbf{v} \in V$ の基底を用いた 1 次結合の表し方は一意的であることを示せ.

(3) A を $n \times (n+1)$ 行列とする．このとき、零ベクトルでない $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ が存在して、$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となることを示せ.

(4) 複素数 $\mathbb{C}$ は実ベクトル空間となることを示せ．そのとき、基底を 1 つ求めよ.

問題 3-2. [部分ベクトル空間]

(1) 次の集合は $\mathbb{C}^3$ 上の部分ベクトル空間となるか？証明せよ.

$$(a)\ \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\} \quad (b)\ \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(2) $V_1, V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とすると $V_1 + V_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in V | \mathbf{x}_i \in V_i\}$ は部分ベクトル空間であることを示せ.

問題 3-3.[ベクトルが生成するベクトル空間の基底]

ベクトル空間 $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \rangle$ において $\mathbf{v}_{i_1}, \cdots, \mathbf{v}_{i_k}$ を最大数の 1 次独立なベクトルとすると、$\{\mathbf{v}_{i_1}, \cdots, \mathbf{v}_{i_k}\}$ は V の基底であることを示せ.

問題 3-4.[関数全体の成すベクトル空間]

実数上の連続関数のベクトル空間 $C^0(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．このとき、多項式全体 $\mathbb{R}[x] \subset C^0(\mathbb{R})$ と指数関数で生成される部分空間 $\langle e^x \rangle \subset C^0(\mathbb{R})$ は 1 次独立であることを示せ.

課題 3-1.[抽象ベクトル空間の基底]
次の $\mathbb{C}[X]_2$ におけるベクトルは基底となるか?

$$(a)\ \{2-3X+2X^2, -1+2X-X^2, 2-3X\},\quad (b)\ \{-2+X+2X^2, 1-X^2, 5-2X-5X^2\}$$

課題 3-2.[線形関係式]
$\mathbb{C}[X]_2$ 上の基底 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_3$ を別の基底 $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_3$ の 1 次結合で表せ.

$$\mathbf{x}_1 = 1-X^2, \mathbf{x}_2 = 2+X-2X^2, \mathbf{x}_3 = -3X+X^2,\quad \mathbf{y}_1 = 1-6X+2X^2, \mathbf{y}_2 = 1+X,\ \mathbf{y}_3 = -3X+X^2$$

(Hint.) 係数を文字でおいて行列を使って求めよ.

課題 3-3.

$$\langle 1+2X+X^2, X+2X^2\rangle + \langle \mathbf{x}\rangle = \mathbb{C}[X]_2$$

を満たす $\mathbf{x}$ を 1 つ求めよ.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html
（課題の解き方の方針などホームページ上に載せることがあります.）
ツイッター：**BasicMathIIB (https://twitter.com/BasicMathIIB)** (HP の更新やコメントなど．)
質問等があれば気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.