線形代数III演習HINT

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'13年1月9日：Keywords ··· ベクトル空間、基底）

問題3-1. [ベクトル空間・基底]

(1) $\mathbb{C}[X]_3$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となることを示せ．またそのベクトル空間の基底を 1 つ求めよ．

(2) V を有限生成ベクトル空間とする．このとき、${}^{\forall}\mathbf{v} \in V$ の基底を用いた 1 次結合の表し方は一意的であることを示せ．

(3) A を $n \times (n+1)$ 行列とする．このとき、零ベクトルでない $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$ が存在して、$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となることを示せ．

(4) 複素数 $\mathbb{C}$ は実ベクトル空間となることを示せ．そのとき、基底を 1 つ求めよ．

(1) ベクトル空間となることは、足し算とスカラー倍を定義し、それらの演算が、

http://www.math.tsukuba.ac.jp/ tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html

の [ベクトル空間の性質] を満たすことを確かめること。

基底であることはあるいくつかの一次独立なベクトルが全ての空間の元を一次結合で表わすことができることを示す。

(2) 基底の特徴づけからわかる。

http://www.math.tsukuba.ac.jp/ tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html

の 1/9 の「内容」の中の基底の満たす２つの条件。

(3) A のランクは n 以下。行の基本変形をすることで、ある縦ベクトルは他のベクトルの一次結合で書けていることがわかる。その係数を $\mathbf{x}$ とする。

(4) 実ベクトル空間は係数（スカラー）が実数のベクトル空間のこと。複素数は２つの実数を用いて $a + bi$ と書ける数のこと。ここで実数の複素数への掛け算は a,b それぞれの掛け算となる。これらのことを用いて複素数に実数ベクトル空間の構造を考えよ。

問題3-2. [部分ベクトル空間]

(1) 次の集合は $\mathbb{C}^3$ 上の部分ベクトル空間となるか？証明せよ.

$$(a)\ \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}\quad (b)\ \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

(2) $V_1, V_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とすると $V_1 + V_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in V | \mathbf{x}_i \in V_i\}$ は部分ベクトル空間であることを示せ.

・部分ベクトル空間となることは教科書を調べること。ベクトル空間の部分集合がベクトル空間の足し算とスカラー倍で閉じていることを証明する。

問題3-3.[ベクトルが生成するベクトル空間の基底]

ベクトル空間 $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n \rangle$ において $\mathbf{v}_{i_1}, \cdots, \mathbf{v}_{i_k}$ を最大数の 1 次独立なベクトルとすると、$\{\mathbf{v}_{i_1}, \cdots, \mathbf{v}_{i_k}\}$ は V の基底であることを示せ.

問題3-4.[関数全体の成すベクトル空間]

実数上の連続関数のベクトル空間 $C^0(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である．このとき、多項式全体 $\mathbb{R}[x] \subset C^0(\mathbb{R})$ と指数関数で生成される部分空間 $\langle e^x \rangle \subset C^0(\mathbb{R})$ は 1 次独立であることを示せ.

・任意の多項式と指数関数の間に実数上の線形な関係式がないことを証明すること。

課題 3-1.[抽象ベクトル空間の基底]

次の $\mathbb{C}[X]_2$ におけるベクトルは基底となるか?

$$(a)\ \{2-3X+2X^2, -1+2X-X^2, 2-3X\},\quad (b)\ \{-2+X+2X^2, 1-X^2, 5-2X-5X^2\}$$

・基底の２つの性質を満たすことを示してください。

課題 3-2.[線形関係式]

$\mathbb{C}[X]_2$ 上の基底 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_3$ を別の基底 $\mathbf{y}_1, \cdots, \mathbf{y}_3$ の 1 次結合で表せ.

$$\mathbf{x}_1 = 1-X^2, \mathbf{x}_2 = 2+X-2X^2, \mathbf{x}_3 = -3X+X^2,\quad \mathbf{y}_1 = 1-6X+2X^2, \mathbf{y}_2 = 1+X,\ \mathbf{y}_3 = -3X+X^2$$

(Hint.) 係数を文字でおいて行列を使って求めよ.

・x_1 を y_1, y_2, y_3 の一次結合で書く。

・x_2 を y_1, y_2, y_3 の一次結合で書く。

・x_3 を y_1, y_2, y_3 の一次結合で書く。

それぞれ係数を置いて計算してよい。

課題 3-3.

$$\langle 1+2X+X^2, X+2X^2\rangle + \langle \mathbf{x}\rangle = \mathbb{C}[X]_2$$

を満たす $\mathbf{x}$ を 1 つ求めよ.

・適当に $\mathbf{x}$ となる多項式を持ってきて証明しれもよいが、$\mathbf{x} = a+bX+cX^2$ とおいて $C[X]_2$ を生成するようにできるか確かめてもよい。左辺が右辺に入ることは当たり前。

逆に、右辺 $(C[X]_2)$ が左辺に入ることを示せばよい。特に $1, X, X^2$ が $1+2X+X^2, X+2X^2, \mathbf{x}$ の一次結合で書けることができればよい。

ホームページ：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html**
（課題の解き方の方針などホームページ上に載せることがあります.）
ツイッター：**BasicMathIIB (https://twitter.com/BasicMathIIB)** (HP の更新やコメントなど．)
質問等があれば気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.