線形代数III演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4回（'13年1月23日：Keyword ⋯ ベクトル空間の基底、次元）

$\mathbb{K}^n$ は成分が $\mathbb{K}$ の数ベクトル空間（縦ベクトル）を表す．ただし $\mathbb{K}$ は任意の体.

[数列のなすベクトル空間] 数列 (x_n) の集合 $\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}|x_n\in\mathbb{C}\}$ は $(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$ として和を定義し、スカラー倍を $\lambda(x_n)=(\lambda x_n)$ として定義することでベクトル空間の構造をもつ．ここでは数列全体の集合を $\mathbb{C}^\infty$ を表すことにする.

[非負整数] $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は非負整数を表す.

[固有空間] 行列 A の固有値 $\lambda(\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ かつ $\mathbf{x}\neq 0$ を満たす λ のこと) に対して、$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{x}$ 全体を固有空間という．固有空間は数ベクトル空間の部分ベクトル空間である.

問題 4-1. [基底, 次元]

(1) 次のベクトルのうちいくつか選んで $\mathbb{C}[X]_3$ の基底にせよ.

$$\{1+X, X+X^2, X^2+X^3, 1+X+X^2+X^3, 1+X^2\}$$

(2) 次のベクトル空間 W の次元を $a\in\mathbb{C}$ の値に従って求めよ.

$$W=\left\langle \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix}\right\rangle$$

(3) 次の集合は数列全体の成すベクトル空間において部分ベクトル空間となるか？証明せよ．また、その基底を求めよ.

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\in\mathbb{C}^\infty|x_{n-1}-2x_n+x_{n+1}=0\ \ (n\geq 2)\}$$

問題 4-2. [基底]

(1) $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$ をベクトル空間 V の基底であるとする．このとき、任意のベクトル $\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_{n+1}$ は1次従属であることを示せ.

(2) V を n 次元ベクトル空間とする。$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ が1次独立であるとする．これは V の基底であることを示せ。

(3) ベクトル空間 V の任意の $n+1$ 個のベクトルが1次従属であり、$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ が一次独立であるとき、V の次元は n 次元であることを示せ.

課題 4-1.[基底の変換]

$\mathbb{C}[X]_2$ において、次の基底の間の変換行列を求めよ。

(a-1) $\{1, 1+X, X^2\}, \{X^2, 1+2x+X^2, 1+X+X^2\}$

(a-2) $\{X, 1+2X^2, 1+X+X^2\}, \{1+2X^2, 2+X+X^2, 1+X+2X^2\}$

課題 4-2.[固有空間の基底]

次の行列において以下の問題に答えよ.

(1) 固有値を全て求めよ.

(2) 各固有値における固有空間の基底を求めよ.

$$(a)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ (b)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

課題 4-3.[行列の作るベクトル空間]

A を $n \times n$ 対角行列とする．つまり、$A = (a_{ij})$ とすると、$a_{ii} = \lambda_i$ かつ、$a_{ij} = 0\ (i \neq j)$ である．このとき、A を変数とする多項式で書ける行列全体の集合を $\mathbb{C}[A]$ と書く．つまり、

$$\mathbb{C}[A] = \{a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m | a_i \in \mathbb{C}\}$$

である．このとき以下の問いに答えよ.

(1) $\dim(\mathbb{C}[A]) \leq n$ であることを示せ.

(2) $\{\lambda_i\}$ が相異なる n 個の数であるとき、$E, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ は一次独立であることを示せ．つまり、$\mathbb{C}[A]$ の基底となることを示せ.

抽象ベクトル空間を扱うには大抵、行列に変換して議論することになるわけですが、そのとき、ベクトル空間の元を並べるときは横ベクトルのようにして．また行列 A を用いて、$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)A$ などと書くのがよいでしょう．ここで定理を紹介．この定理から抽象的なベクトル空間の議論から行列の議論に移行できる.

定理

$\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ が 1 次独立なら、行列 X, Y に対して、$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)X = (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)Y$ が成り立つなら、$X = Y$ である.

(証明) 移項して、$(\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n)(X - Y) = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$ であるが、$X - Y$ の各縦ベクトル $\mathbf{c} = {}^t(c_1, \cdots, c_n)$ に対して、$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ が成り立つ．1 次独立性から $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ が成り立つ．ゆえに、$X = Y$ □

これらの問題に困ったら....

(上の問題の HINT)

問題 4-1(1)(これらのベクトルを基底を使って書き下せ．その行列を簡約化する．)

(2)(このベクトルのうち一次独立なものが何本あるか...)

問題 4-2(1)(問題 3-1(3) を用いる．)

(3)(任意のベクトルを $\mathbf{v}$ がこの n 個のベクトルの 1 次結合で書けることを証明せよ．)

問題 4-3(これらの基底を分かりやすい基底において変換し、その間の関係を求めよ．)

課題 4-1(両方をまず $\{1, X, X^2\}$ の線形結合で表してみよ．上の定理を用いて行列に変換する．そして係数を求める．)

課題 4-2(固有空間を定義する連立一次方程式を解くこと．)

課題 4-3(行列の足し算をベクトル空間の加法とする．ケーリーハミルトンの定理とファンデルモントの公式．)

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html

質問等があれば気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.

ツイッター：BasicMathIIB (https://twitter.com/BasicMathIIB)

課題の解き方の方針などホームページ上に載せることがあります.