線形代数III演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回（'13年1月30日：Keyword $\cdots$ ベクトル空間の直和）

[ベクトル空間の直和] ベクトル空間 V がある部分ベクトル空間 V_1, V_2 として、$V = V_1 + V_2$ となり、$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ となっているとき V は V_1 と V_2 の直和として、$V = V_1 \oplus V_2$ と書く.（部分ベクトル空間を使った和なので内部直和ともいう.）

また、V_1, V_2 をベクトル空間として、$V = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} \in V_1, \mathbf{y} \in V_2\}$（$V_1, V_2$ の形式和と考えてよい）と定義し、V_1, V_2 はそれぞれ 1 次独立である（V_1, V_2 の non-zero ベクトルが 1 次独立である）とき、V のことも V_1 と V_2 の直和といい、$V = V_1 \oplus V_2$ と書く．このとき、自然に、V_i は V の部分ベクトル空間となる.（もともと V_1, V_1 は別のベクトル空間だったので外部直和ともいう.）

問題 5-1. [ベクトル空間の直和]

(1) $V_1 = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | x_1 - x_3 = 0\right\}, V_2 = \left\{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 | \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\right\}$ とすると き、$\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $V_1 = \langle 1 + X, X + X^2 \rangle, V_2 = \langle 1 + 2X + X^2, 1 + X^3 \rangle$ とすると、V_1 と V_2 は $\mathbb{C}[X]_3$ 上で直和にならないことを示せ.

(3) (a) $V_i (i = 1, 2, 3)$ をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする．$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ かつ $V_1 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$ であるとき、$V_2 \cap V_3 = \{0\}$ となるか？

(b) $\{\mathbf{0}\}$ はベクトル空間だが、$V \oplus W = V \Leftrightarrow W = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ.

(4) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ に対して、v が任意の v_i と 1 次独立であるとき、V と $\langle v \rangle$ は直和を構成するか？ただし、$v_i \neq \mathbf{0}$ とする.

問題 5-2. [ベクトル空間の直和 2]

(1) V をベクトル空間とする．$\mathbf{v}_i (i = 1, \cdots, s), \mathbf{w}_j (j = 1, \cdots, t)$ を V の 1 次独立なベクトルとして $V_1 = \langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s \rangle, V_2 = \langle \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t \rangle$ とする．このとき、任意の $1 \leq i \leq s$ と $1 \leq j \leq t$ に対して、$\{\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_t\}$ と $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s, \mathbf{w}_j\}$ が 1 次独立であるとしても $V_1 + V_2$ はそれぞれの直和になるとは限らないことを示せ.

(2) n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とし、固有空間を V_{λ_i} とする．このとき、$V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間となることを示せ.

問題 5-3. [基底, 次元]

(1) ベクトル空間 V の部分空間 W をとる．また、V はある部分空間 V_1, V_2 に対して、$V = V_1 \oplus V_2$ であるとき、$W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$ となるか.

(2) A を $(n-1) \times n$ 行列とする．また、$\mathrm{rank}(A) = n - 1$ とする．このとき、$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ とおく．このとき、ある横ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ が存在して、$\{\mathbf{x} \in W | (a_1, \cdots, a_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$ となることを示せ.

(3) 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間において、$\{\sqrt{2}, 1\}$ は 1 次独立であることを示せ．$\{\mathbb{R}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であるが、有限次元ベクトル空間ではないことを示せ.

課題 5-1.[解空間の基底]
次の連立一次方程式の解空間の基底を求めよ.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

課題 5-2.[ベクトル空間の直和]
$V_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 | \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}, V_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 | \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$ とおく. このとき、$V = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

課題 5-3.[直和になるための条件]
ベクトル空間 V の元 $v_1, \cdots, v_n$ と $w_1, \cdots, w_m$ があるとする. いま、$v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_m$ が 1 次独立であるとすると、$V_1 = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle, V_2 = \langle w_1, \cdots, w_m \rangle$ とすると、$V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

これらの問題に困ったら....

(上の問題の HINT)

問題 5-1(1)$V_1 \cap V_2$ を考えよ.

(2)$V_1 \cap V_2$ はどうなるか. また、$V_1 + V_2$ が何かを考えてもよい.

(3-a)$V_1 \oplus V_2$,$V_1 \oplus V_3$ があるときに、$V_2 \oplus V_3$ が構成できるか?

問題 5-2(1) 簡単な場合を考えてみよ.

(2)$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_r}$ が直和の条件を満たすか?

問題 5-3(1) 簡単な例を用いて考えよ.

(2)A の横ベクトルの 1 次結合に入らないベクトルをとれ.

(3) ベクトル空間としてのの足し算やスカラー倍は通常の $\mathbb{Q}$ の加法、乗法とする.

課題 5-1 連立 1 次方程式の解き方の復習. 解いたときに現われるベクトルが解空間の基底となるか確認必要.

課題 5-2 $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ.

課題 5-3 直和になるための条件を考えよ.

ホームページ:`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html`
ツイッター:**BasicMathIIB (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)**
質問等があれば気軽にメールしてください. 携帯からでも OK です.
課題の解き方の方針などホームページ上に載せることがあります.