線形代数III演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第7回（'13年2月13日：Keywords ⋯ 線形写像、補空間、標準基底）

[標準基底] $\mathbb{K}^n$ 上の標準基底 $\{\mathbf{e}_i\}$ とは、$\mathbf{e}_i = {}^t(0,\cdots,0,1,0\cdots,0)$（$i$ 番目の成分だけが 1 で他の成分は 0）のことである．

[1次独立なベクトルを延長して基底を求めること] n 次元ベクトル空間 V において、1 次独立なベクトル $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$ をその一部にもつ基底 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ を求める方法は次のようにすれば求まる．数ベクトル空間の場合、行列 $A = (\mathbf{v}_1\cdots\mathbf{v}_m\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_n)$ の rank は明らかに n である．この中から 1 次独立なベクトルを（簡約化を使って）$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$ 以外に最大数選び出せばよい．

[線形変換] ベクトル空間 V において線形写像 $f: V\to V$ を V 上の線形変換という．

問題 7-1. [1 次独立なベクトルを延長すること]
(1) n 次元ベクトル空間 V において 1 次独立なベクトル $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$ をとる．$m<n$ であるとき、あるベクトル $\mathbf{v}\in V$ が存在して、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}$ も 1 次独立にできることを示せ．
(2) $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m$ が (1) と同じ仮定を満たすベクトルとする．．$m<n$ であるとき、あるベクトル $\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_{n-m}$ が取れて $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_m,\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_{n-m}$ が V の基底にすることができることを示せ．
(3) $\mathbb{C}^3$ 上で、ベクトル $\mathbf{v}_1 = {}^t(1,1,-1), \mathbf{v}_2 = (0,1,-1)$ をとる．このとき、あるベクトル $\mathbf{v}$ で $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}$ が $\mathbb{C}^3$ の基底となるものを構成せよ．
(4) $V=\mathbb{C}[X]_3$ において、1 次独立なベクトル $\{1+X+X^2+X^3, X+X^2\}$ を延長して V 上で基底を構成せよ．
(5) 教科書系 6.11 の逆が成り立たないことを示せ．つまり $\dim(W_1)+\dim(W_2)=\dim(W)$ であるからといって $W=W_1\oplus W_2$ となるとは限らないことを示せ．

問題 7-2. [代入操作]
(1) a を任意の複素数として、$\varphi_{n,a}:\mathbb{C}[X]_n\to\mathbb{C}$ を $f(X)\to f(a)$ とする．この写像は線形写像であるか？もしそうなら $\mathrm{Ker}(\varphi_{2,1})$ を求め、その基底と次元を求めよ．
(2) ω を 1 の 3 乗根 $\cos(\dfrac{2\pi}{3})+\sqrt{-1}\sin(\dfrac{2\pi}{3})$ とすると、$\mathbb{R}[\omega]$ は $\mathbb{R}[X]_1$ と線形同型であることを示せ．

問題 7-3. [全射な線形写像]
(1) $f: V\to W$ を全射な線形写像とする．$\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_n$ を W の基底とする．$\mathbf{v}_i$ を $f(\mathbf{v}_i)=\mathbf{w}_i$ となる V のベクトルとする．このとき、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ は V で 1 次独立であることを示せ．
(2) $f: V\to W$ を全射な線形写像とする．このとき、$\dim W\le\dim V$ が成り立つことを示せ．

問題 7-4. [数ベクトル空間上の線形写像]
(1) 数ベクトル空間上の任意の線形写像 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ はある $m\times n$ 行列 A を左から掛けることで得られることを示せ．つまり、$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$ と書ける．
(2) $\mathbb{C}^n$ 上の標準基底を $\{\mathbf{e}_i\}$ とする．今、$\mathbb{C}^n$ 上の線形変換 f が、$f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=\mathbf{e}_1$, $f(\mathbf{e}_{i-1}+\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{i+1})=\mathbf{e}_i$ $(i=2,\cdots n-1)$, $f(\mathbf{e}_{n-1}+\mathbf{e}_n)=\mathbf{e}_n$ となるものとする．この線形変換 f に対して (1) における行列 A を求めよ．

課題 7-1.[表現行列への導入]
(1) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を以下を満たすような線形写像とする.

$$f(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ f(3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$$

このとき、f はどのような行列の左からの積として表せるか. ただし、$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は $\mathbb{C}^2$ の標準基底とする.
(2) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ を $\mathbb{C}^3$ 上の標準基底とする. 線形写像 $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}[X]_2$ を $\varphi(\mathbf{e}_i) = X^{i-1}$ として定義する. φ は同型写像であることを示せ.
(3) $\partial_X : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}[X]_2$ を X に関する微分が与える写像とする.（つまり、$\partial_X(f(X)) = \dfrac{df(X)}{dX}$.）今、(2) の同型写像 $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}[X]_2$ を用いて、線形写像 D を $\varphi^{-1} \circ \partial_X \circ \varphi$ と定義する. このとき、D は線形写像 $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を与える. $D : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ.

課題 7-2.[線形写像が単射であるための条件]
線形写像 $f : V \to W$ が単射であることと $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ であることは同値（必要十分）であることを示せ.

これらの問題に困ったら....

(上の問題の HINT)
問題 7-1(1) 背理法. (2) (1) を繰り返し用いてよい. (3) 上の解説を参考に求めてみよ.
(4) X^{i-1} と $\mathbf{e}_i$ を同一視して (3) と同じ方法を用いよ. (5) 易しい. できるだけ簡単な例を見つけよ.
問題 7-2(1) 条件式から連立 1 次方程式を解け.
(2) ω が満たすできるだけ簡単な方程式から ω の多項式が ω の 1 次式まで小さくできることを示せ.
問題 7-3(1) 1 次独立の条件を満たすか？ (2) (1) を用いてよい.
問題 7-4(1) $f(c_1\mathbf{e}_1 + \cdots c_n\mathbf{e}_n)$ を計算せよ.
(2) A の第 i 列は $f(\mathbf{e}_i)$ となることを使え.
課題 7-1(1) 問題 7-4(2) の HINT と同じ方針.
(2) 基底が基底に写っているか？そしてそれが全単射かどうか？
(3) $D(\mathbf{e}_i)$ が何に変わるか？微分によって多項式の係数がどう変化するか？
課題 7-2 写像が単射であるとは $f(p) = f(q)$ ならば $p = q$ であることである.

それでも問題に詰まったら...
ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2012jugyo/senkei20123.html`
ツイッター：**BasicMathIIB (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)**
質問等があれば気軽にメールしてください. 携帯からでも OK です.
課題の解き方の方針などホームページ上に載せることがあります.