線形代数III演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回（'13年2月20日：Keyword ⋯ 表現行列）

[同型写像] ベクトル空間 V, W の間の $f : V \to W$ が同型であるとは、f が線形写像であり、全単射であるものである．

[表現行列] ベクトル空間 V, W に対して、線形写像 $f : V \to W$ をとる．V の基底を1つ決めると同型写像 $\varphi_V : \mathbb{C}^n \to V$ を作ることができ、同じように W の基底を1つ決めると同型写像 $\varphi_W : \mathbb{C}^m \to W$ を作ることができる．この同型写像を使って、線形写像 $\tilde{f} = \varphi_W^{-1} \circ f \circ \varphi_V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を作ることができる．$\tilde{f}$ は数ベクトル空間上の線形写像であるから（この場合は）$m \times n$ 行列の左からの掛け算となる．これを表現行列という．$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ と $\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m\}$ をそれぞれの基底とすると、実は $f(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)A$ となる行列 A が表現行列であると言うこともできる.．ここで、左辺は $(f(\mathbf{v}_1), \cdots, f(\mathbf{v}_n))$ の意味.

問題 8-1. [線形写像]
(1) ベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ に対して $\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n \rangle$ の次元は n 以下であることを示せ.
(2) $f : U \to V, g : V \to W$ が線形写像であるとすると、その合成 $g \circ f$ も線形写像であることを示せ。
(3) $\mathbf{R}^3$(xyz-空間) 上の原点を中心とした x-, y-, z-軸におけるそれぞれの θ 回転は線形写像であることを示せ.
(4) n 次元ベクトル空間 V と m 次元ベクトル空間 W の間の線形写像全体 $\mathrm{Hom}(V, W)$ は、それぞれの基底を選ぶこととである $m \times n$ 行列全体と同一視できることを示せ.

問題 8-2. [基底と同型写像、数ベクトル空間上の表現行列]
(1) ベクトル空間 V に対して V の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ を選ぶことと、ある n があって同型写像 $\varphi_V : \mathbb{C}^n \to V$ が作れることは同値であることを示せ.
(2) 数ベクトル空間の間の写像 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $(\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x})$ において、基底 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ の表現行列は $P^{-1}AP$ であることを示せ．ここで、$P = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)$ である.

問題 8-3. [ベクトル空間の間の線形写像の表現行列]
(1) 線形写像 $F : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}[X]_2$ を $F(f(X)) = X^2 \cdot f(X^{-1})$ として定義する．このとき、$\mathbb{C}[X]_2$ の適当な基底を用いて f を 3×3 行列で表現せよ.
(2) 線形写像

$$f : \mathbb{C}^2 \ni \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \in \mathbf{C}^2$$

に対して、$\mathbb{C}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を用いた f の表現行列を求めよ.
(3) $\partial_X : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}[X]_2$ を X に関する微分が与える写像とする．つまり、$\partial_X(f(X)) = df(X)/dX$. このとき、$\mathbb{C}[X]_2$ の適当な基底を選ぶことで、∂_X の表現行列を求めよ.
(4) フィボナッチ数列全体のなすベクトル空間

$$V = \{(x_n) \in \mathbb{C}^\infty | x_{n+1} = x_n + x_{n-1} (n \geq 2)\}$$

を考える．V の元を数列 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ のように表したとき、次のような数列のシフト写像

$$f : (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) \mapsto (a_3, a_4, a_5, a_6 \cdots)$$

を V の適当な基底を使って表現せよ.
(5) V, W をベクトル空間とする．その基底を $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$、$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$ を選んで固定する．A を線形写像 $f : V \to W$ のこれらの基底に関する表現行列とする．つまり、$f(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) =$

$(\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_n)A$ である．このとき、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ を $\mathbf{v}'_1,\cdots,\mathbf{v}'_n$ に変える基底の変換行列を P, $\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m$ を $\mathbf{w}'_1,\cdots,\mathbf{w}'_m$ に変える基底の変換行列を Q とする．このとき、$\mathbf{v}'_1,\cdots,\mathbf{v}'_n$ と $\mathbf{w}'_1,\cdots,\mathbf{w}'_m$ に関する f の表現行列は $Q^{-1}AP$ となることを示せ．つまり、$f(\mathbf{v}'_1,\cdots,\mathbf{v}'_n)=(\mathbf{w}'_1,\cdots,\mathbf{w}'_m)Q^{-1}AP$.

問題 8-4. [線形写像の核を求めること]
線形写像 $F:\mathbb{C}[X]_2\to\mathbb{C}[X]_1$ を、$F(f(X))=\dfrac{f(X)-f(0)}{X}$ と定義する．このとき、$\mathrm{Ker}(F)$ を求めよ．

課題 8-1.[表現行列の計算]
(1) 線形写像 $F:\mathbb{C}[X]_2\to\mathbb{C}[X]_2$ を

$$F(a+bX+cX^2)=a+b+c+(a-b+c)X+(-a+b-c)X^2$$

とするとき、$\mathbb{C}[X]_2$ の基底 $\{1,X,X^2\}$ に関する F の表現行列を求めよ．
(2) $\mathbb{C}^3$ の基底 $\{{}^t(1,2,1),{}^t(-1,0,1),{}^t(0,0,1)\}$ に対して、線形写像

$$F:\mathbb{C}^3\ni\mathbf{x}\to\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}\mathbf{x}\in\mathbf{C}^3$$

の、上の基底を用いた表現行列を求めよ．

課題 8-2.[線形写像の核]
次の写像 $F:\mathbb{C}[X]_3\to\mathbb{C}[X]_2$ の核（$\mathrm{Ker}(F)$）の基底を求めよ．

$$F(f(X))=f(-X)-f(2-X)$$

課題 8-3.[他の人の解答にとらわれない自由な発想を求む．]
ベクトル空間の直和はベクトル空間同士の足し算と思える．ではベクトル空間の引き算はどのように定義できるだろうか？また負の次元のベクトル空間はどのように定義したよいか自分なりのアイデアを述べよ.（0 と自然数を使って整数全体を表す方法があればそれでもかまわない.）

これらの問題に困ったら....

(上の問題の HINT)

問題 8-1(1) この $\langle\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\rangle$ の中で基底が n 個より多く取れないことを示せ．基底としてこれらのベクトルの部分集合が取れることを示せば O.K.　(2) $g\circ f$ が線形写像の定義に適うか調べよ.

(3) 回転は行列によって表されるか？調べよ.

問題 8-2(1) 基底を使ってどのように同型写像を作るか.

(2) $f(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)B$ となる B が求める行列.

問題 8-3(1-2) $(F(\mathbf{v}_1),F(\mathbf{v}_2),\cdots,F(\mathbf{v}_n))$ を行列を使って表せ.

(3) 多項式を微分すると、多項式はどう変化するかを行列を使って表せ.

(3) V の基底として適当なものを選べ．その基底がシフトすることでどのような線形写像となるか？

問題 8-4 F の表現行列を簡約化することで方程式 $\mathrm{Ker}(f)=\{f(X)|F(f(X))=0\}$ を解け.

課題 8-1(1) $(F(1),F(X),F(X^2))$ を求め、$(1\ X\ X^2)A$ の形にせよ.

(2) (1) と同じ要領で行列 A を求めよ.

課題 8-2 $(F(1),F(X),\cdots,F(X^3))$ を行列表示し、その行列を簡約化することで、Ker を求めよ.