トポロジー I 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1回（'13 年 4 月 15 日：Keywords $\cdots$ 位相空間）

位相空間（トポロジー）の考え方

距離空間→近傍、収束、連続（空間のつながり方に関する概念が生まれる）
距離の取り方に依存しない空間概念を考えたい．しかし、収束や連続性などは考えたい．
収束、連続などの性質を持った空間概念→位相空間

[**位相空間**] $(X,\mathcal{O})$ が位相空間であるとは、以下を満たすものである．
(X:空間, $\mathcal{O}$:開集合の集まり（位相空間において開集合として指定するもの)
$[\mathbf{O}_1]: X,\emptyset\in\mathcal{O}$
$[\mathbf{O}_2]: O_1,\cdots,O_k\in\mathcal{O}\Rightarrow O_1\cap O_2\cap\cdots O_k\in\mathcal{O}$
$[\mathbf{O}_3]: \{O_\lambda|\lambda\in\Lambda\}\Rightarrow\cup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}$
この集合 $\mathcal{O}$ を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の開集合という．
B の補集合 $X\setminus B$ が開集合であるとき、B を閉集合という．

[**有限補集合位相**] X を集合として $\mathcal{O}=\{U\subset X|U=\emptyset \text{ or } X-U:\text{finite}\}$ としたときに得られる位相空間 $(X,\mathcal{O})$ を有限補集合位相という．

[**距離化可能**] 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が X 上のある距離 d が存在して、$\mathcal{O}=\mathcal{O}_d$（$d$ から決まる距離位相）となるとき、$(X,\mathcal{O})$ は距離化可能という．このような距離を $(X,\mathcal{O})$ の許容距離という．

[**順序位相**] $(X,\le)$ を全順序集合とする．X 外の $\{\infty,-\infty\}$ をとり、任意の $x\in X$ に対して、$-\infty<x<\infty$ となる順序を入れる．$\mathcal{O}_\le=\{U\subset X|\forall x\in U,\exists a,b\in X\cup\{\pm\infty\}$ に対して、$x\in(a,b)\subset X\}$ とおく．このとき、$(X,\mathcal{O}_\le)$ は位相空間となる．この位相を順序位相という．

$\boxed{\text{問題 1}}$ $\{1,2,3\}$ 上の位相に対して、距離化できるものを全て求めよ．

$\boxed{\text{問題 2}}$ 位相空間 X が離散空間であるためには, 一点集合がすべて開集合となることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 3}}$ 有限補集合位相は位相空間となることを確かめよ．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 順序位相 $(X,\mathcal{O}_\le)$ は位相空間となることを確かめよ．

$\boxed{\text{問題 5}}$ $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．A を X の任意の部分集合とする．このとき、$\mathcal{O}(A)=\{A\cup O|O\in\mathcal{O}\}\cup\{\emptyset\}$ とする．このとき、$\mathcal{O}(A)$ は X 上の位相空間であることを示せ．
（注：この $\mathcal{O}(A)$ は部分位相とは違うものである.）

$\boxed{\text{問題 6}}$ $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．$(Y,\mathcal{O}_Y)$ をその部分空間とする．すべての X の部分集合 A に対して $A^i\cap Y$ が Y の中で A の内部になることと Y が X の中で開集合であることは同値であることを示せ. (参考：**問 15.7**)

$\boxed{\text{問題 7}}$ A を位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合とする．このとき、$\forall x\in A^e$ に対して $x\in U$ となる開集合 U は、$U\cap A^i\neq\emptyset$ かつ $U\cap A^f\neq\emptyset$ を満たすことを示せ.

問題 8 無限集合 X に有限補集合位相を与えた位相空間は距離化できないことを示せ.

問題 9 **[問 16.1]** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，A を X の部分集合とする．A の閉包 $\bar{A}$ と導集合 A^d について、$\bar{A} = A \cup A^d$ が成り立つことを示せ.

問題 10 **[問 16.2]** (X, d) を距離空間とし，$\mathcal{O}_d$ を d によって定まる距離位相とする．X の点 a について，距離空間 (X, d) における点 a の近傍系と，位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$ における点 a の近傍系とは一致することを確かめよ.

問題 11 **[問 16.3]** (X_1, d_1) および (X_2, d_2) を距離空間とし、$\mathcal{O}_j$ を d_j によって定まる距離位相とする．写像 $f : X_1 \to X_2$ について、f が距離空間 (X_1, d_1) から (X_2, d_2) への連続写像であることと、f が位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であることは、同等（同値）であることを確かめよ.

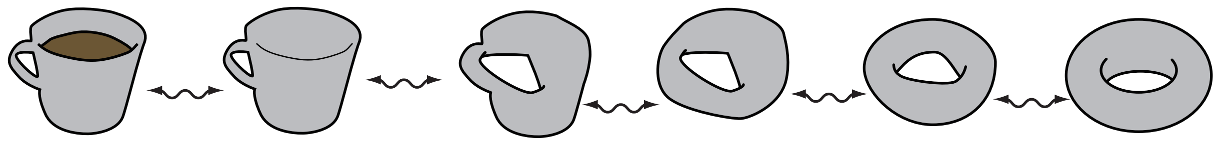
番外問題 1 **[問 15.2] の拡張．** $\{1, 2, 3\}$ 上の位相は 29 通りあるが、一般に n 点集合上の位相の数 $T(n)$ を与える公式を求めよ.
（注意！答えは一般に知られていません．詳しくは以下の page を見よ.）
`http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_topological_space`

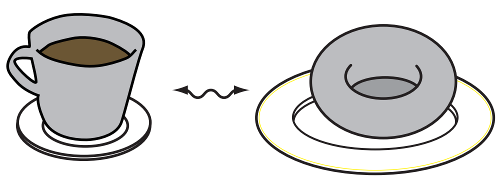
参考文献

集合と位相（内田伏一）裳華房.
位相空間の基礎概念（酒井克郎）Web で検索のこと.
位相空間論（森田紀一）絶版なので図書館にて探すこと.
Counterexamples in topology(Lynn Arthur Steen and J.Arthur Seebach Jr.)Dover.
トポロジーへの招待（寺澤順）日本評論社

Homepage：
(`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html`)
Twitter：
BasicMathIIB (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.





!?