微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 1 回（’14 年 10 月 3 日：Keywords $\cdots$ 復習、多変数の連続性）

定義.

1-1. 内点 $\cdots$ 集合 S の内点 p とは、ある $\epsilon > 0$ があって、ϵ-近傍 $U_\epsilon(p)$ が $p \in U_\epsilon(p) \subset S$ となること．S の内点全体を $\overset{\circ}{S}$ とかく．$S = \overset{\circ}{S}$ となる集合 S を**開集合**という.

1-2. 外点 $\cdots$ 集合 S の外点 p とは、ある $\epsilon > 0$ があって、ϵ-近傍 $U_\epsilon(p)$ が $p \in U_\epsilon(p) \cap S = \emptyset$ となること．$(\overset{\circ}{S^c})$ と表せる．ここで S^c は S の補集合のこと.

1-3. 境界点 $\cdots$ 集合 S の境界点 p とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ϵ-近傍 $U_\epsilon(p)$ が $U_\epsilon(p) \cap S \neq \emptyset$ かつ、$U_\epsilon(p) \cap S^c \neq \emptyset$ となること．∂S とかく．$\partial S \subset S$ のとき、S は**閉集合**という.

1-4. 多変数関数の連続性 $\cdots$ 多変数関数 $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ での連続性

$$f(a, b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

は、(a, b) に近づく任意の点列 $\boldsymbol{p}_n = (a_n, b_n)$ に対して、$f(a_n, b_n)$ が $f(a, b)$ に収束することである．一変数の連続性は、左極限と右極限の連続性から言えるが、多変数は、一点への近づき方は無限にありうる.

1-5. 広義積分の収束 $\cdots$ 広義積分の収束は以下のべき関数の収束を用いて行う.

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ は $s > 1$ のとき収束し、$s \leq 1$ のとき発散する.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ は $s < 1$ のとき収束し、$s \geq 1$ のとき発散する.

今日の課題.

1. 春学期の復習（関数の連続性、テイラー展開、広義積分、広義積分の収束）

例：三角関数 $\sin x, \cos x$、指数関数 $\exp(x)$、べき関数 x^α

2. 内点、外点、開集合、閉集合

例題-1-1. [一変数関数の連続性]

つぎの関数の連続かどうか調べよ．ただし、多項式の連続性は用いてよい.

$$f(x) = |x|$$

例題-1-2. [一変数関数の微分]

次の関数を微分しなさい.

(1) $f(x) = \mathrm{Arcsin}(x)$　　(2) $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$

例題-1-3. [マクローリン展開]

次の関数をマクローリン展開しなさい.

(1) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$　　(2) $f(x) = \sqrt{1+x}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$　　(4) $f(x) = \tan(x)$

例題-1-4. [広義積分の収束]
次の広義積分は収束するか判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

例題-1-5. [広義積分の収束]
ガンマ関数を $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ として定義する．このとき、この積分が収束することを示せ．

例題-1-6. [内点、外点]
平面上の円盤 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 1\}$ の内点、外点、境界点をわかるように図示しなさい．

例題-1-7. [連続]
次の関数は連続であるといえるか？

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

宿題-1-1. [開集合]
平面上の開集合でも閉集合でもない集合の例を与えよ．

宿題-1-2. [無限個の値に収束する多変数関数]
以下の問題にこたえよ．

(1) $(0,0)$ に近づく任意の点列は、極座標を使ってどのように表されるか？（教科書 P126 の下をみよ.）
(2) $(x,y)\neq(0,0)$ で定義される関数 $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は近づき方によってどのような値に近づくか？

宿題-1-3. [マクローリン展開]
次の関数をマクローリン展開しなさい．

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

ホームページ：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：**(http://motochans.blogspot.jp/)**
（授業内容など）
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部．