微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第10回（'14年12月26日：Keywords ··· 線積分、面積分、ガンマ関数、ベータ関数）

定義および定理.

10-1. 線積分. ··· $C=(x(t),y(t))$ を平面上の曲線とする．線積分は

$$\int_C (f(x,y)dx+g(x,y)dy)=\int (f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+g(x(t),y(t))\frac{dy}{dt})dt$$

として計算される．この計算は C の任意のパラメータ表示方法によらない．実際別のパラメータ $t=t(s)$ とし、$x(t(s))=\xi(s), y(t(s))=\eta(s)$ とする．

$$\int\left(f(\xi(s),\eta(s))\frac{d\xi}{ds}+g(\xi(s),\eta(s))\frac{d\eta}{ds}\right)ds=\int\left(f(x,y)\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}+(g(x,y)\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\right)ds$$

$$=\int\left(f(x,y)\frac{dx}{dt}+g(x,y)\frac{dy}{dt}\right)dt$$

10-2. グリーンの定理. ··· C を平面上の単純閉曲線とする．C を境界とする平面上の領域を D とする．$P(x,y),Q(x,y)$ が D 上で C^1 級関数とする．このとき以下の等式が成り立つ．

$$\int_C (P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\int_D\left(\frac{\partial Q}{dx}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

10-3. 曲面積と第一基本量. ··· $\mathbb{R}^3$ 内の曲面は $S=S(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ と表される．この曲面に対して、$S_u=(x_u,y_u,z_u),S_v=(x_v,y_v,z_v)$ とおく．このとき、$E=S_u\cdot S_u,\ F=S_u\cdot S_v,\ G=S_v\cdot S_v$ を第一基本量という．ここで、$\tilde{D}$ を (u,v) 平面での領域とし、$D=S(\tilde{D})$ 上での曲面の面積 Δ は

$$\Delta=\int\int_{\tilde{D}}\sqrt{EG-F^2}dudv$$

として計算される．この E,F,G に対して、

$$I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

を曲面の第一基本形式（リーマン計量）という．

とくに、曲面を $S(u,v)=(u,v,f(u,v)),\ \ (u,v)\in\tilde{D}, S_u=(1,0,f_u),S_v=(0,1,f_v)$ であるから、各、第一基本量は $E=1+f_u^2,\ F=f_uf_v,\ G=1+f_v^2$ となり、面積 Δ は

$$\Delta=\int\int_{\tilde{D}}\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}dudv$$

となる．

10-4. 回転面. ··· $f(x)\ge 0$ を満たす関数 $y=f(x)$ に対して $(u,f(u)\cos v,f(u)\sin v)$ を x 軸に沿った回転面という．f の定義域を R とすると、このパラメータ表示の $\{(u,f(u)\cos v,f(u)\sin v)|u\in R,0\le v\le 2\pi\}$

10-5. ガンマ関数、ベータ関数. ··· $\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ と定義し、ガンマ関数という．

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 定義し、ベータ関数という．

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

が成り立つ.

今日の課題.
1. 線積分の計算.
2. 面積分の計算.
3. グリーンの公式.

例題-10-1. [線積分]
次の積分の値を求めよ.

(1) $\int_C (x^2dx + 2xydy)$、C は $(1,1)$ から $(-1,3)$ へ直線を結んだもの.

(2) $\int_C (xdx + ydy)$、C は単位円を反時計回りに回る.

(3) $\int_C (-ydx + xdy)$、C は単位円を反時計回りに回る.

(4) $\int_C (y^2dx + x^2dy)$、C は単位円のうち y が正の部分.

例題-10-2. [曲面積]
次の曲面における第一基本形式を求め、その領域での曲面の面積を求めよ.

(1) $(u, v, uv), D = \{(u, v, uv)|0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$

(2) $(u\cos v, u, \sin v, v), 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \frac{\pi}{2}$

(3) $(u, v, u^2 + v^2),\ \ u^2 + v^2 \le 1$

(4) $(u, v, u^2 - v^2),\ \ 0 \le u, v \le 1$

例題-10-3. [回転面]
回転面の表面積を求めよ.

例題-10-4. [線積分]
C_1, C_2 をある線分 L を共有する有向閉曲線とする. その線分では向きは逆向きであるとする.
C を C_1, C_2 の L で融合させた有向閉曲線とする. このとき、以下が成り立つことを示せ.

$$\int_C (Pdx + Qdy) = \int_{C_1} (Pdx + Qdy) + \int_{C_2} (Pdx + Qdy)$$

例題-10-5. [線積分]
$(P(x, y), Q(x, y))$ が勾配ベクトル場である場合、任意の閉曲線 C において、$\int_C (P(x, y)dx+Q(x, y)dy) =$ であることを示せ.

例題-10-6. [ガンマ関数]
ガンマ関数について以下の問題に答えよ.

(1) $\Gamma(s)$ は $s > 0$ において収束する.

(2) $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$ また、$\Gamma(n) = (n - 1)!$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

宿題-10-1. [トーラスの表面積]

トーラスとは、$x^2 + (y - R)^2 = r^2$, $R > r > 0$ なる円を x 軸に沿って回転させた回転面である．以下の問題に答えよ．

(1) トーラス全体を適当なパラメータ (u, v) によって表示せよ．また、u, v の範囲はどのようになるか？

(2) 上の第一基本量 E, F, G を計算せよ．

(3) トーラスの表面の面積を求めよ．

トーラスのパラメータ表示は x, y を用いる方法と、sin, cos 関数を用いる方法と 2 種類あります．

宿題-10-2. [積分]

C を反時計回りに回る単位円周とする．

(1) 次の線積分 $\int_C (\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy)$ を計算せよ．

(2) 上の計算はグリーンの定理は適用できるか？もしできるとするとその場合にグリーンの定理が正しいことを示せ．もし適用できないとするとその理由を記せ．

(3) 原点を内部に含まない曲線上の線積分においてはグリーンの公式が成り立つか？

宿題-10-3. [sin, cos の n 上の積分]

$\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta$、$\int_0^\pi \cos^n \theta d\theta$ を計算せよ．

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：**http://motochans.blogspot.jp/**
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：**(https://twitter.com/BasicMathIIB)**
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます．
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて．