微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 11 回（'15 年 1 月 9 日：Keywords $\cdots$ n 次元の極座標、n 次元球の体積）

定義および定理.

11-1. 極座標. $\cdots$ n 次元の極座標は、回転体の座標を繰り返しとることで、以下のように得られる.

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

11-2. S^n(n 次元球面). $\cdots$

$$\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=r^2\}$$

なる集合を n 次元球面といい、S^n とかく.

11-3. B^n(n 次元球体). $\cdots$

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le r^2\}$$

なる集合を n 次元球体といい、B^n とかく.

11-4. 回転面. $\cdots$ 回転面 $(x,y)=(u,f(u))$ $(u_0\le u\le u_1)$ の x 軸に沿った回転体の体積は、

$$V=\pi\int_{u_0}^{u_1}f(u)^2du$$

と計算される.

今日の課題.

1. 回転体の体積.
2. n 次元極座標.

例題-11-1. [パラメータ]
上の極座標において、$r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}$ はどのような値をとれば、空間上の点が全て表されるか？

例題-11-2. [1,2,3 次元球の表面積と体積]
次の値を求めよ.

(1) S^1 の長さを求めよ.

(2) B^2 の面積を求めよ.

(3) S^2 の面積を求めよ.

(4) B^3 の体積を求めよ.

例題-11-3. [高次元球面および高次元球体の n 次元体積]
次の値を求めよ.

(1) S^3 の 3 次元体積を求めよ．

(2) B^4 の 4 次元体積を求めよ．

(3) S^4 の 4 次元体積を求めよ．

(4) B^5 の 5 次元体積を求めよ．

宿題-11-4. [回転体の体積]
$y = \sin x\ \ (0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸に沿って回転したときに出来る回転体の体積を求めよ．

宿題-11-1. [n 次元の極座標のヤコビアン]
上の n 次元の極座標のヤコビ行列を求め、その行列式としてヤコビアンを計算せよ．

宿題-11-2. [積分]
半径が r の n 次元球面と n 次元球体の体積を求めよ．

例題-11-3. [ドーナツ]
中身が詰まったトーラス $D(r, R)$ をここではドーナツと呼ぶことにする．r, R は前回の宿題のトーラスのパラメータと同じとする．ドーナツの体積を一定にしたまま、R を 2 倍にするには r を何倍に縮めなければならないか？

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：(https://twitter.com/BasicMathIIB)
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます．
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて．