微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第12回（'15 年 1 月 15 日：Keywords ··· 一様収束な関数列）

定義および定理.

12-1. 級数の収束. ··· $s_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$ とおくとき、s_n が極限 $n \to \infty$ において収束するとき、級数は収束するといい、その値を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とかく.

12-2. 等比級数. ··· $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は $|r| < 1$ のとき収束し、値は $\frac{a}{1-r}$ となる.

12-3. 級数の判定. · · ·（ライプニッツの判定法）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が交代級数（つまり、任意の n に対して $a_n a_{n+1} < 0$ が成り立つ）であり、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

（コーシーの判定法）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数であり、（有限この n を除いて）$\sqrt[n]{a_n} \le r < 1$ を満たす r が存在するとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

（ダランベールの判定法）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は正項級数であり、（有限この n を除いて）$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

（絶対収束）任意の n に対して $|a_n| \le b_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

12-4. 一様収束. ··· 関数列 $f_n(x)$ が $B \subset \mathbb{R}$ で一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して $n > N$ なる任意の n に対して、任意の $x \in B$ に対して $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ が成り立つ.

12-5. 関数列の極限. ··· f_n が区間 I で連続な関数であり、f_n が I において f に一様収束するとする. このとき、f は I で連続である.

12-6. 微分と極限の順序交換. ··· $f_n(x)$ が区間 I 上で C^1 級関数とし、$f_n'(x)$ が I 上一様収束するとし、ある点 $x_0 \in I$ で、$f_n(x_0)$ である点に収束しているとする. このとき、$\lim_{n\to\infty} \frac{d f_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が成り立つ. つまり、微分と極限が交換ができる.

12-7. 積分と極限の順序交換. ··· $f_n(x)$ が区間 I 上で連続関数とし、$f_n(x)$ が I 上一様収束しているとする. このとき、$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$ が成り立つ. つまり、極限と積分の交換ができる.

12-8. 項別微積分. ··· $f_n(x)$ は連続関数からなる関数項級数とする. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が区間 I 上で f で一様収束するなら f も I 上連続である. I において $f_n(x)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ が、I 上一様収束し、さらに、ある $x_0 \in I$ があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I で一様収束し、項別微分 $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(x)}{dx}$ が成り立つ.

$f_n(x)$ が連続関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が I で一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(x)dx$ は I 上一様収束し、I 上で $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$ が成り立つ.

12-9. 優級数法. ··· 区間 I で定義された関数項級数 $f_n(x)$ に対して $|f_n(x)| \leq M_n$ が成り立ち、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が成り立つとする．このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は一様収束する.

12-10. べき級数. ··· $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数をべき級数という．このべき級数に対して

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

として計算される量をこのべき級数の収束半径とよぶ．この R は $|z| < R$ なる任意の複素数 z に対して級数が（絶対）収束する．特にこのとき、関数項級数は一様収束する．収束半径内においては項別微積分ができ、できた級数も同じ収束半径をもつ.

今日の課題.

1. 級数の収束発散を判定すること.
2. 一様収束することを判定すること.

例題-12-1. [級数の収束]

次の球数が収束するかどうか判定せよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^{-n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\ \ (a > 0)$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

例題-12-2. [一様収束]

つぎの関数列は $[0,1]$ で一様収束するか？

(1) nxe^{-nx}

(2) $n^2x^n(1-x)^n$

(3) $nx(1-x)^n$

例題-12-3. [級数の一様収束]

次の関数項級数は区間 $I=[0,1]$ 上で一様収束するか？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin(2\pi x)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)}{n}x^n$

例題-12-4. [関数項級数]

次の級数の区間 $[0,1]$ における一様収束性を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin(2\pi x)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)}{n}x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^2)x^n$

例題-12-5. [収束半径]

次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\log n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{\sqrt{n}}z^n$

宿題-12-1. [数列の収束]

次の級数は収束するか？

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)-1}{(\log(n+1))^2}$$

宿題-12-2. [積の数列の極限]

$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ とおくとき、数列 $|S_n|$ が有界であり、実数列 b_n は単調減少で、$b_n\to 0$ であるなら、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ が収束することを示せ.

宿題-12-3. [一様収束]

下の式の左辺が一様収束することを示し、等式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1)$$

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：**http://motochans.blogspot.jp/**
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：**(https://twitter.com/BasicMathIIB)**

アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます.

困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて.