微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第13回（'15年1月23日：Keywords ··· べき級数）

定義および定理.

13-1. 広義（コンパクト）一様収束. ··· 関数列 $f_n(z)$ が閉領域とは限らない領域 A において、広義（コンパクト）一様収束するとは任意の有界閉集合 $B \subset A$ において、$f_n(z)$ が一様収束するということである.

13-2. 項別微積分. ··· $f_n(z)$ をある領域 A 上での連続関数からなる関数項級数とする.

(1). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ も A 上連続である.

(2). A において $f_n(z)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ が、I 上広義一様収束し、さらに、ある $z_0 \in I$ があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は A で広義一様収束し、項別微分

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(z)}{dz}$$

が成り立つ.

(3). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^z f_n(t)dt$ は A 上広義一様収束し、A 上で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$$

が成り立つ.

13-3. べき級数. ··· $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数をべき級数という．このべき級数に対して、$|z| < R$ においてこのべき級数が絶対収束するような R の上限として定義される．つまり、

$$\sup\{r||z| < r \text{ においてべき級数が絶対収束する}\}$$

この量は下のように計算される.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

収束半径の内部ではべき級数は広義一様収束し、収束半径内においては項別微積分ができ、できた級数も同じ収束半径をもつ.

また、収束半径を求めるのに、$|z| < R$ で絶対収束し、$|z| = R$ において発散するものを探してもよい.

13-4. 多重対数関数. ··· $\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$ と多重対数関数とよぶ.

13-5. ガウスの判定法. ··· 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$ を満たすとき、$\alpha > 1$ なら絶対収束し、$\alpha \le 1$ なら発散する.

今日の課題.
1. べき級数の収束半径を求めること.
2. 項別微積分をすること.

例題-13-1. [収束半径]
次の級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$

例題-13-2. [項別微積分]
次の収束半径を求め、その領域において、項別微積分をすることで、次の級数展開をもつ関数を求めよ．また、収束円周上の値はどうなるか？

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

例題-13-3. [べき級数展開]
つぎの関数の $z = a > 1$ でのべき級数展開を求めよ．またその収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\frac{1}{1-z}$

(2) $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^2}$

例題-13-4. [べき級数]
$f(n)$ を多項式とする．このとき、以下の問題に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$ の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n+1) z^n$ を求めよ.

(3) $f(n)$ が m 次多項式であるとする．このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^n = \frac{g(z)}{(z-1)^{m+1}}$ となることを示せ.
ここで、$g(z)$ は $z-1$ で割れないある多項式.

宿題-13-1. [数列の収束]
s を正の整数とする．多重対数関数 Li_s を $\displaystyle\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n=1} \frac{z^n}{n^s}$ と定義する.

(1) $\mathrm{Li}_s(z)$ の収束半径を求めよ.

(2) $\left(z\dfrac{d}{dz}\right)^s \mathrm{Li}_s(z) = \dfrac{1}{1-z}$ を満たすことを示せ.

宿題-13-2. [積の数列の極限]

関数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ に対して、a を $a < 1$ なる実数とする．このとき、$f(z)$ の $z = a$ でのべき級数展開を求め、その収束半径を求めよ.

宿題-13-3. [ガウスの超幾何関数]

$a.b.c$ を実数とする．このとき、$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ などと表す．このとき、

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

と定義する．このとき、以下の問題に答えよ.

(1) $F(a,b,c;z)$ の収束半径は 1 であることを示せ.

(2) $a+b<c$ であるなら、$|z| = 1$ でも $F(a,b,c;z)$ は絶対収束することを示せ.

（ガウスの判定法を用いよ）

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：(https://twitter.com/BasicMathIIB)
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます.
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて.