

第14回 ('15年1月30日 : Keyword ... 重積分再訪)

定義および定理.

14-1. フビニ型の定理. ... $I = [a, b] \times [c, d]$ を \mathbb{R}^2 上の有界閉区間とする. $f(x, y)$ は I 上で定義された有界関数とし、積分可能とする. 各 $x \in [a, b]$ を固定したとき、関数 $f(x, \cdot)$ が区間 $[c, d]$ で y の関数として積分可能とする. このとき、

$$\int \int_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

が成り立ち、各 $y \in [c, d]$ を固定したとき、関数 $f(\cdot, y)$ が区間 $[a, b]$ で x の関数として積分可能とする. このとき、

$$\int \int_I f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

が成り立つ.

今日の課題.

1. 積分の演習.

例題-14-1. [定積分]

次の定積分の計算を次の2通りのやり方に沿って求めよ.

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$$

(1) $x = \tan \theta$ と変数変換をする.(2) 関数 $F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\log(1+ax)}{1+x^2} dx$ を考えて、この関数形を決定し、そのあとに $\alpha = 1$ を代入する.**例題-14-2.** [重積分] $a > 0$ なる実数に対して、次の重積分を求めよ.

$$\int_0^a \int_0^x \frac{y^2}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy dx$$

例題-14-3. [重積分]

積分

$$\int \int_D \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

を求めよ.

例題-14-4. [重積分]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xy} \sin ax dx dy$$

について以下の問題に答えよ.

(1) x から先に積分せよ.

(2) y から先に積分せよ.

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ.

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : <http://mochans.blogspot.jp/>

(授業内容など. 宿題のヒントを書くことも...)

twitter : (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

アドレスはプリント1ページ目上部. 手習い塾 : 水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます.

困ったときは : 質問など随時受け付けます. まずはメールにて.