微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回（'14年10月10日：Keywords ··· 全微分、偏微分）

定義および定理.

2-1. 連続関数. ··· $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続であるとは、(a,b) に近づく任意の点列 $\boldsymbol{p}_n=(a_n,b_n)$ が $f(a_n,b_n)$ が収束することである.

2-2. 偏微分係数. ··· $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での x に関する偏微分とは、$y=b$ を固定して、できる関数 $f(x,b)$ を x に関する1変数関数とみなして、$x=a$ で微分することである．またその微分係数のことを x に関する偏微分係数という．y に関しても同様である．これは、関数のグラフ $z=f(x,y)$ を $y=b$ に制限してできる関数 $z=f(x,b)$ の微分係数を求めている.

2-3. 全微分. ··· 2変数関数 $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であるとは、ランダウの記号を用いて、

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\alpha h+\beta k+o(\sqrt{h^2+k^2})\ \ (h,k)\to(0,0)$$

が成り立つような α,β が存在することである．一変数の微分可能のときの拡張になっている．比べてみよ．全微分可能であれば、偏微分可能であり $\alpha=f_x$ かつ $\beta=f_y$ である．これは、$(a,b,f(a,b))$ においてグラフ上に接平面が存在することと同値である.

全微分可能とは、偏微分可能と区別するための用語であり、単に微分可能という場合には、全微分可能のことを指す.

2-4. 全微分可能であるための必要条件. ··· $f(x,y)$ は全微分可能であるなら、関数 $z=f(x,y)$ の偏微分 f_x,f_y が存在する．つまり偏微分可能である.

2-5. 全微分可能であるための十分条件. ··· 関数 $z=f(x,y)$ の偏微分 f_x,f_y が存在し、それらが連続であれば、$f(x,y)$ は全微分可能である.

今日の課題.

多変数関数が連続であることの示し方．多変数関数の偏微分の計算．多変数関数が全微分可能であることの示し方．全微分可能であることの示し方.

例題-2-1. [連続性]

次の関数は連続か？

(1) $f(x,y)=x^2+y^2+xy^2$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(6) $f(x,y)=\begin{cases}\log(\sin(xy)) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

例題-2-2. [偏微分]
次の関数を偏微分せよ.

(1) $x^5 + xy + y^2 - 2$

(2) $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(3) $x^5 + xy + 2$

(4) $z = x^y$

例題-2-3. [全微分の定義]
(1) $f(x, y) = \sin(x + y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.
(2) $f(x, y) = x\cos(x + y)$ が $(x, y) = (0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

例題-2-4. [全微分可能性]
次の関数は全微分可能か？（$(x, y) = (0, 0)$ での全微分可能性についてのべよ.）

(1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(4) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(5) $f(x, y) = \min\{|x|, |y|\}$

(6) $f(x, y) = \begin{cases} xy\log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

宿題-2-1. [偏微分]
次の関数の偏微分係数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ.

(1) $x^2 + xy + 2y^2 + 5x - y - 2$

(2) $\sqrt[3]{x^4 + y^4}$

(3) $\log(\sin(\sqrt{x^2 + y^2}))$

宿題-2-2. [全微分]
関数 $f(x, y) = xy$ が全微分可能であることを定義に基づいて示せ.

宿題-2-3. [連続・全微分]
次の関数の原点で連続性、全微分可能性について調べよ.

$$f(x, y) = xy\log(\sin(x^2 + y^2)) \quad (x, y) \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}\right\}$$

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：(https://twitter.com/BasicMathIIB)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部.