微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第3回（’14 年 10 月 24 日：Keywords ··· 接線、法線、合成関数の微分）

定義および定理. 定義および・定理

3-1. 接平面の方程式. ··· 関数 $z = f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とする．このとき、

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}) \quad (x,y) \to (a,b)$$

を満たすが、最後の項を取り除いて、

$$z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)$$

$$\Leftrightarrow f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

となる (x,y,z) の方程式が得られる．この方程式は、関数 $z = f(x,y)$ のうち、２次以上の項を無視してできる方程式なので、接平面の方程式とよばれる．この２次以上の項を無視することを関数の一次近似という.

3-2. 法線の方程式. ··· 法線は $t \in \mathbb{R}$ として、

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$$

と表せる．t を消去して、

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

となる．これを法線の方程式という.

3-3. 合成関数の微分法. ··· (x,y)-平面上に、$(x(t),y(t))$ をおく．このとき合成関数 $F(t) = f(x(t),y(t))$ の $t = t_0$ での微分は、

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0)) \cdot y'(t_0)$$

となる.

これは、関数 $f(x,y)$ を $(x(t),y(t))$ に制限してできる t を変数とする関数 $F(t)$ の t による微分を計算する式である.

3-4. 偏微分の順番の交換可能のための十分条件.···(a,b) において、$f_x(a,b), f_y(a,b), f_{xy}(a,b), f_{yx}(a,b)$ が存在し、もし、f_{xy} と f_{yx} が連続ならば、(a,b) において $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ となる.

今日の課題.

接平面・法線の方程式の求め方.
合成関数の微分法.

例題-3-0. [接線、法線の方程式]
つぎの関数の $(a, f(a))$ での接線、および法線の式を求めよ.

(1) $f(x) = x^2$　　　(2) $f(x) = x^3 + x + 1$

例題-3-1. [法線方向]
関数全微分可能関数 $z = f(x,y)$ のグラフ $(x,y,f(x,y))$ に対して、方向 $(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$ は、(a,b) において、接平面に直交することを示せ.

例題-3-2. [接平面、法線の式]
次の関数の $(a,b,f(a,b))$ での接平面および、法線の式を求めよ.

(1) $f(x,y)=xy$

(2) $f(x,y)=x^2+y^2$

(3) $f(x,y)=x^3+2xy^2+2x^2y^2$

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad (a,b)\neq(0,0)$

例題-3-3. [合成関数の微分]
つぎの関数を合成してできる関数 $F(t)$ の t での微分を合成関数の微分法を用いて求めよ.

(1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2,\ \ x=2t^2,\ y=t+1$

(2) $f(x,y)=\sin(xy),\ \ x=2t+1,\ y=t^2+t$

(3) $f(x,y)=e^x\sin(y)+e^y\sin(x),\ \ x=\log(t),\ \ y=\log(t)$

(4) $f(x,y)=x^3+y^3, x=\cos t, y=\sin t$

(5) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}, x=\cos t, y=\sin t$

例題-3-4. [合成関数の微分]
次の関数の $(x,y)=(2+\cos\theta,\sin\theta)$ における θ-微分を合成関数の微分法を用いて求めよ.

(1) $f(x,y)=x+y$

(2) $f(x,y)=xy$

(3) $f(x,y)=\tanh(x^2+y^2)$

(4) $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$

例題-3-5. [平面と曲面との交わり]
次の関数は原点において、偏微分を計算せよ. また、この関数のグラフと $z=0$ とはどのように交わっているか？

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

(2) $f(x,y)=x^3+y^3$

(3) $f(x,y)=x^2-y^2$

(4) $f(x,y)=x^2-3xy+y^2$

宿題-3-1. [接平面]
次の関数の (a,b) での接平面の方程式を求めよ.

(1) $f(x,y)=\tanh(x^2+y^2)$.

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}\quad (a^2+b^2<1)$

宿題-3-2. [接平面との交点]
関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ におけるグラフ G と、グラフ上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面 $P_{a,b}$ を考える. この接平面において、G が $P_{a,b}$ より上側にある領域と下側の領域を図示せよ.（ここで図は、接平面を (x,y) 平面からのグラフだと思って、接平面と (x,y) 平面と同一視せよ.）

宿題-3-3. [合成関数]
$f(x,y)$ を点 (x,y) と原点からの距離を表すとする.

(1) 中心 $(1,1)$、半径 1 の円 $(1+\cos\theta,1+\sin\theta)$ 上の $f(x,y)$ の θ-微分を合成関数を用いて示せ.

(2) (1) の θ-微分が 0 となる円上の点を図示せよ.

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：**http://motochans.blogspot.jp/**
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：**(https://twitter.com/BasicMathIIB)**
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 **5,6** 限 **1E403** にて質問を受け付けます.
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて.