微積分II演習
担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第4回（'14年10月31日：Keywords ⋯ 合成関数の微分法II、極値について）

定義および定理.

4-1.C^n 級関数. ⋯ $f(x,y)$ が C^n 級関数とは、各点において $f(x,y)$ の x,y に関する全ての n 階偏微分が可能で、その n 階偏導関数が全て連続であるときをいう．n 階偏微分とは、例えば $\dfrac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ のように、微分の回数が x,y 合わせて n 回あるものである．C^n 級の場合は、n 階導関数はその順番にはよらない．いくらでも x,y に関して微分できるとき、C^∞ 級という.

4-2. 合成関数の微分法 II. ⋯ 関数 $z = f(x,y)$ と、$x = \varphi(s,t), y = \psi(s,t)$ に対して、$z = F(s,t) = f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ とすると、次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial s} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s} & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}$$

この合成関数は前回やったものを２回やったものである．この後ろの行列の行列式を $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ とかきヤコビアンという

4-3. テイラーの定理. ⋯ 以下の定理は一変数のテイラーの定理の２次元版である．(a,b) において、C^n 級関数 $f(x,y)$ に対して $h = x-a, k = y-b$ とする．また、$d = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ とおくと、

$$f(x,y) = f(a,b) + df(a,b) + \frac{d^2 f}{2!}(a,b) + \cdots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!}(a,b) + \frac{d^n f}{n!}(a+\theta h, b+\theta k)$$

となるような $0 < \theta < 1$ が存在する．$f(x,y)$ が C^∞ 級関数であり、この展開の剰余項が収束すれば、$f(x,y)$ を無限級数で書くこともできる.

4-4. 極大点、極小点、臨界点. ⋯ 関数 $z = f(x,y)$ において (a,b) が**極大点**であるとは、ある (a,b) の ϵ-近傍 $B_\epsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$ が存在して、${}^\forall(x,y) \in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと.

$$f(x,y) < f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

また、(a,b) が**極小点**であるとは、ある ϵ が存在して、${}^\forall(x,y) \in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと.

$$f(x,y) > f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

教科書ではこの不等号にイコールが入った形だが、この定義は狭義の極値である．関数が (a,b) において極大点（もしくは、極小点）であり、偏微分可能であれば、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つ．また、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) のことを**臨界点**もしくは**停留点**という.

4-5. 極値問題. ⋯ $f(x,y)$ を C^2 級関数とし、(a,b) において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つとする．このとき、次の行列を定義し

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

その行列式が $\det(H(a,b)) \neq 0$ を仮定する．このとき、

$$\begin{cases} \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) > 0 & \Leftrightarrow \text{極小点} \\ \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) < 0 & \Leftrightarrow \text{極大点} \\ \det(H(a,b)) < 0 & \Leftrightarrow \text{鞍点} \end{cases}$$

$\det(H(a,b)) \neq 0$ かつ $f_{xx}(a,b) = 0$（もしくは $f_{yy}(a,b) = 0$）であるなら、$\det(H(a,b)) < 0$ であることに注意せよ．$H(a,b)$ はヘッセ行列、$\det(H(a,b))$ をヘッシアンという．

このとき、関数 $f(x,y)$ は $h = x - a, k = y - b$ とすると、

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)h^2 + f_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)k^2 + o(h^2 + k^2)$$

のように $f(x,y)$ は (a,b) において 2 次近似（2 次形式により近似）されている．グラフの曲面の曲がり方は主に 2 次近似によって影響を及ぼしている．

臨界点において、$\det(H(a,b)) = 0$ であるなら、その点は極値のときもあれば、極値でない場合もある．別な方法により解析する必要がある．

<u>**4-6.** ヘッシアンと曲率.</u> ⋯ $f_y(a,b) = f_y(a,b) = 0$ なる臨界点 (a,b) におけるヘッシアンは二つの曲率（曲がり方）の積である．

$$\det(H(a,b)) = \kappa_1\kappa_2$$

κ_1, κ_2 は $H(a,b)$ の固有値であり、$\kappa_2 \leq \kappa_1$ とすると、その固有ベクトルは、(a,b) を通り固有ベクトルの方向の曲率が、最大 κ_1 と最小 κ_2 をとる．曲率とは空間の曲がり具合のことであり、この場合その方向での 2 階偏微分と一致する．曲がり具合を決めているのは主に 2 階偏微分でる．

結局、$0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ であれば、その点において、どの方向も正の向きに曲がっているし、$\kappa_2 \leq \kappa_1 < 0$ であれば、どの方向にも負に曲がっている．$\kappa_2 < 0 < \kappa_1$ であれば、負に曲がっている方向と正に曲がっている方向が両方ある．

今日の課題.

合成関数の微分法 II の演習
テイラーの定理.
極値問題.

例題-4-1. [合成関数の微分法 II]

次の関数を合成した関数 $F(u,v)$ の u, v に関する偏微分を計算せよ．

(1) $z = xy^2 + x^2y, x = u + v, y = u - v$

(2) $z = \sin(x - y), x = u^2 + v^2, y = 2uv$

(3) $z = f(x,y), x = 2u - 3v, y = u - 5v$

例題-4-2. [微分作用素]

関数 f を C^2 級関数とする．

(1) $z = \left(2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$ を f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて示せ．

(2) $f(x,y) = e^{2x+y}$ のとき、$\left(2\frac{\partial}{\partial x} + 3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$ を求めよ．

例題-4-3. [テイラー展開]

つぎの関数を $(x,y) = (0,0)$ においてテイラー展開せよ．

(1) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1 - x^2y}$

(2) $f(x,y) = x^3ye^{xy}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$

例題-4-4. [関数の極値]

次の関数の $z = f(x,y)$ での極大点、極小点を求めよ．

(1) $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

(2) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$

(3) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2x^2y^2$

(4) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$

(5) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(6) $f(x,y) = xy(1-2x-3y)$

例題-4-5. [合成関数の微分法]
関数 $z = f(x,y)$ が $z = g(x+y)$ とかける必要十分条件は $f_x = f_y$ であることを示せ.

宿題-4-1. [合成関数の微分法]

(1) $z = f(x,y),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とし、その合成関数を $F(r,\theta)$ とする．このとき、$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (F_r)^2 + \dfrac{1}{r^2}(F_\theta)^2$ を満たすことを示せ.

(2) 関数 $z = f(x,y)$ が $z = g(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2})$ と書ける必要十分条件は $yf_x = xf_y$ であることを示せ.

宿題-4-2. [極値問題]
次の関数の極大点もしくは極小点を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^3 - x^2 + xy - y^2 - 2x + y - 7$

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

宿題-4-3. [ラプラシアン]
$z = f(x,y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のとき、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ.

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html**
（主にプリントのダウンロード用）
blog：**http://motochans.blogspot.jp/**
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：**(https://twitter.com/BasicMathIIB)**
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます.
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて.