微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第5回（'14年11月7日：Keywords ⋯ テイラー展開・陰関数の微分法）

定義および定理.

5-1. 微分演算子 d^n の展開. ⋯ d を $d = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ とすると、

$$d^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} h^r k^{n-r} \frac{\partial^n}{\partial x^r \partial y^{n-r}}$$

と展開される．ただし、$h = x - a,\ k = y - b$.

5-2. 漸近展開、無限級数展開. ⋯ C^n 級関数 $f(x,y)$ において、次が成り立つ.

$$f(x,y) = f(a,b) + (df)(a,b) + \frac{d^2 f}{2!}(a,b) + \cdots + \frac{d^n f}{n!}(a,b) + o(r^n)$$

ただし、$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$．また、$C^\infty$ 級関数 $f(x,y)$ において、剰余項が収束すれば、

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{n!}(a,b)$$

とかける．このとき、この級数の収束域について問題となるが、ここでは、剰余項の収束する領域を考えるが、多くの場合形式的に扱う.

5-3. 陰関数の定理. ⋯ $F(x,y)$ を C^1 級関数とする．$F(x,y) = 0$ を満たす点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ が $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ を満たすなら、ある ϵ が存在して、$\boldsymbol{x}_0$ の ϵ-近傍において、$F(x,y) = 0$ を満たす**陰関数** $y = \varphi(x)$ が存在する．つまり、その領域において、$F(x, \varphi(x)) = 0$ を満たす.

5-4. 微分係数. ⋯ (x_0, y_0) において、関数 $F(x,y) = 0$ における変数 y において陰関数定理の仮定が成り立つとする．陰関数を $y = \varphi(x)$ とすると、(x_0, y_0) の近くの $F(x,y) = 0$ を満たす点 (x,y) において、

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

と計算できる．また、２階微分は、$\varphi''(x) = -\dfrac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$ となる.

5-5. 陰関数の接線および法線の方程式. ⋯ $F(x,y)$ が C^1 級であるとする．このとき、$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ であるなら、$F(x,y) = 0$ を満たす集合の (x_0, y_0) での接線の方程式は $y = -\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x - x_0) + y_0$ となる．また、法線の方程式は、$y = \dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(x - x_0) + y_0$ となる.

今日の課題.

1. テイラー展開をもう一度、極値問題.
2. 陰関数定理

例題-5-1. [テイラー展開と極値問題]

次の関数を $(0,0)$ において、３次の項までテイラー展開せよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1 - x^2 y}$ (2) $f(x,y) = x^3 y e^{xy}$ (3) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$

例題-5-2. [関数の極値]
次の関数の $z = f(x,y)$ での極大点、極小点を求めよ．

(3) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2x^2y^2$

(4) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$

(5) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(6) $f(x,y) = xy(1-2x-3y)$

例題-5-3. [陰関数の定理]
次の関数 $F(x,y)$ において、関係式 $F(x,y) = 0$ を x を変数とする陰関数 $y = \varphi(x)$ として局所的に解くことができる点 (x_0, y_0) の条件を求めよ．

(1) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

(2) $F(x,y) = x^3+3xy+y^5-x+1$

(3) $F(x,y) = x^2 - xy + y^3 - 7$

例題-5-4. [陰関数の接線、法線]
つぎの方程式 $F(x,y) = 0$ を与えれた点 (a,b) における接線、法線の方程式を求めよ．

(1) $F(x,y) = 3x^2 - xy^2 + 2xy + y - x$, $(1,2)$

(2) $F(x,y) = xe^{2y} - e^{xy} + \sin \pi xy + y$, $(0,1)$

宿題-5-1. [陰関数の微分]
$F(x,y)$ を C^2 級関数とする．$F(x,y) = 0$ を満たす領域において点 (x_0, y_0) の近くで陰関数 $y = \varphi(x)$ を持つとする．このとき $\varphi(x)$ の 2 階微分は

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

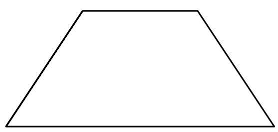
と計算できることを示せ．

宿題-5-2. [テイラー展開]
次の関数を臨界点 $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ において、$o(r^3)$ $(r \to 0)$ を用いて 3 次の項までテイラー展開せよ．ここで、$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ とする．臨界点がいくつかある場合はそのいくつか（有限個）だけ行えばよい．

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + y^3$

(2) $f(x,y) = \sin x \cos y$

宿題-5-3. [等脚台形の面積の最小値]
周の長さが $r =$（一定）となる等脚台形の面積の最小値はその台形が正方形のときであることを示せ．



HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：(https://twitter.com/BasicMathIIB)
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます．
上記の問題について困ったり、悩んだりしたら：今一度、相談を．まずはメールにて．