

第6回 ('14年11月14日：Keywords・・・陰関数定理、勾配ベクトル場)

定義および定理.

6-1. 特異点. ... $F(a_1, \dots, a_n) = 0$ なる点 $(a_1, \dots, a_n)$ が特異点であるとは、全ての i に対して、 $F_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = 0$ となることである. 特異点でない点を正則点という.

6-2. 勾配ベクトル場. ... 関数 $z = f(x, y)$ に対して、各点 (a, b) において、その関数が最も増える方向は、 $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ であり、そのベクトルを勾配ベクトルという. また、各点においてそのようなベクトルを対応させたものを、勾配ベクトル場といい、 $\text{grad}(f)(a, b)$ とかく.

同じように、 $w = F(x, y, z)$ となる関数の勾配ベクトル場は、 $\text{grad}(F)(a, b, c) = (F_x, F_y, F_z)$ である.

6-3. 陰関数定理 II. ... 集合が、 $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ が $F_{x_n}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ となるなら、 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の近くで、 $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$ と解ける. また、そのときの偏微分は、 $\varphi_{x_i} = -\frac{F_{x_i}(x_1, \dots, x_n)}{F_{x_n}(x_1, \dots, x_n)}$ となる. $(a_1, \dots, a_n)$ が F の正則点であるとする、その点での接平面の方程式は次のようになる.

$$F_{x_1}(a_1, \dots, a_n)(x_1 - a_1) + F_{x_2}(a_1, \dots, a_n)(x_2 - a_2) + \dots + F_{x_n}(a_1, \dots, a_n)(x_n - a_n) = 0$$

6-4. 陰関数定理 III. ... $F(x, y, z), G(x, y, z)$ を C^1 級関数とする. $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ を満たす点 (a, b, c) において、ヤコビアン条件 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$ を仮定する. このとき、 a を含む開区間 $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) と、関数 $y = f(x), z = g(x)$ が存在して、以下を満たす.

1. $(a, b, c) = (a, f(a), g(a))$ ($a \in I$) かつ、 $F(x, f(x), g(x)) = G(x, f(x), g(x)) = 0$ ($x \in I$) である.
2. $x \in I, (y, z) \in U_\epsilon(y, z)$ かつ、 $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ ならば、 $(y, z) = (f(x), g(x))$ である.
3. $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ ならば、 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, f(x), g(x)) \neq 0$ ($x \in I$) となり、さらに、 $f(x), g(x)$ は C^1 級であり、

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}(x, f(x), g(x))}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, f(x), g(x))}, \quad g'(x) = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}(x, f(x), g(x))}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x, f(x), g(x))}$$

上のヤコビアン条件の仮定は、その点 (a, b, c) における接線が $(1, 0, 0)$ に垂直でないことを意味する. 行

列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ の行列式を考えてみよ.

今日の課題.

1. 陰関数の定理を使って応用すること.
2. 勾配ベクトルの意味を理解すること.

例題-6-1. [特異点]

次の集合の特異点を求めよ.

(1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

(2) $x^2 - y^2 = 0$

$$(3) x^3 + y^3 = 3$$

$$(4) y^2 = x^2(x + 1)$$

例題-6-2. [勾配ベクトル]

$z = f(x, y)$ における次の関数 $f(x, y)$ で定義される勾配ベクトル $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ を図示せよ.

$$(1) f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$(2) f(x, y) = xy$$

$$(3) f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$(4) f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

例題-6-3. [陰関数の定理 II]

次の関数から作られる集合 $V = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 | F(x, y, z) = 0\}$ 中の正則点の集合 V_0 を求め、その点での接平面の方程式を求めよ.

$$(1) F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$(2) F(x, y, z) = x^2 - y^3 - yz$$

例題-6-4. [陰関数の2階微分]

C^2 級関数 $F(x, y) = 0$ に対して、 a において、陰関数 $y = f(x)$ が存在したとする. このとき、 $f'(a) = 0$ ならば、 $f''(a) = -\frac{F_{xx}(a, f(a))}{F_{yy}(a, f(a))}$ であることを示せ.

例題-6-5. [陰関数の極値]

次の関数の陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ.

$$(1) x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$(2) y^2(x^2 + 1) = 0$$

$$(3) y^2 = x^3(x - 1)$$

$$(4) y^4 = x^4(1 - x^2)$$

例題-6-6. [陰関数定理 III]

次の関数 $F(x, y, z), G(x, y, z)$ で定義できる集合 $V = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0\}$ が x からの関数としてかけるのはいつか? 求めよ.

$$(1) \begin{cases} F(x, y, z) = z - x^2 - y^2 \\ G(x, y, z) = x + 2y + 4z \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 \\ G(x, y, z) = x + y + z \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1 \\ G(x, y, z) = x^3 + yz \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} F(x, y, z) = x^2 + y + z^3, \\ G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{cases}$$

宿題-6-1. [行列式が1の行列]

行列全体 $M(n, \mathbb{R})$ において、 $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$ とする. このとき、任意の $A_0 = (x_{ij}) \in SL(n, \mathbb{R})$ において、ある x_{ij} が存在して、 A_0 の周りの $SL(n, \mathbb{R})$ の十分小さい近傍が存在して、その近傍において $SL(n, \mathbb{R})$ がある関数 φ を使って $x_{ij} = \varphi(x_{11}, \dots, \hat{x}_{ij}, \dots, x_{nn})$ と表されることを示せ. ただし、 $\hat{x}_{ij}$ は変数 x_{ij} を除くことを意味する. n 変数が煩わしければ、 $n = 2$ として考えてよい.

(Hint: 行列式が1であることから、小行列式に対してどのようなことがいえるか?)

宿題-6-2. [勾配ベクトル場]

次の関数 $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$ は a を変えた時、その勾配ベクトル $\text{grad}(f)(x,y)$ の様子はどのように変わるか？調べよ。各点でのベクトルの向く方向がわかるように書き、その長さは気にする必要はない。

(Hint1:原点の周りを回った時にベクトルがどのように移り変わるだろうか？)

(Hint2: $a = 2$ の前後でベクトル場の様子が変わる。なぜか？)

宿題-6-3. [陰関数定理]

平面曲線 $F(x,y) = 0$ を極座標表示したものを $G(r,\theta) = 0$ とする。つまり、 $G(r,\theta) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ である。このとき、以下の問題に答えよ。

- (1) $F_x(x,y), F_y(x,y)$ を $G_r(r,\theta), G_\theta(r,\theta)$ を用いて表せ。
- (2) $G(r,\theta) = r - \sin 2\theta$ であるとき、対応する関数を $F(x,y)$ とする。この曲線の特異点を求めよ。また、正則点における接平面の方程式を記せ。
- (3) F, G を (2) と同じものとするとき、方程式が、陰関数 $y = \varphi(x)$ として解けるのは (x,y) がどのような値のときか。

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : <http://motochans.blogspot.jp/>

(授業内容など。宿題のヒントを書くことも...)

twitter : (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

アドレスはプリント1 ページ目上部。手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます。

困ったときは：質問など随時受け付けます。まずはメールにて。