微積分 II 演習
担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 7 回（'14 年 12 月 5 日：Keywords ··· ラグランジュの未定乗数法）

定義および定理.

7-1. 最大最小、極値. ··· C^∞ 関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ の極値はその偏微分において $f_{x_i}=0$ が成り立つ．最大値、最小値は極値である．f を有界閉部分集合 $X\subset\mathbb{R}^n$ に対する関数 $f:X\to\mathbb{R}$ は、f は最大最小が存在する.

7-2. ラグランジュの未定乗数法.···条件 $g_i(x_1,x_2\cdots,x_n)=0\,(i=1,\cdots,m)$ において関数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の極値を下のようにして求める方法である．このとき、$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ とすると、

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=F(x_1,x_2\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x_1,\cdots,x_n)$$

とおくと、$g_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ の条件のもとでの F の極値において、H の臨界点を与える.

例:$g(x,y)=0$ における $F(x,y)$ の最大を求める．$g(x,y)=0$ の陰関数を $y=\varphi(x)$ とすると、$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ であるから、$g_y(x,y)\neq 0$ において、 このとき、$H(x)=F(x,\varphi(x))$ の極値を求めると、$H'(x)=F_x(x,\varphi(x))+F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=F_x(x,\varphi(x))-F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$

$$\begin{pmatrix}g_x(x,y)&g_y(x,y)\\F_x(x,y)&F_x(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\varphi'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ゆえに、$\begin{pmatrix}g_x(x,y)\\g_y(x,y)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}F_x(x,y)\\F_y(x,y)\end{pmatrix}$ となる λ が存在する.

今日の課題.

1. ラグランジュの未定乗数法を使って関数の最大最小を求めること.

例題-7-1. [ラグランジュの未定乗数法]

与えられた条件のもと関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) 条件 $x^2+y^2=2,\ f(x,y)=y-x$

(2) 条件 $x^2+2y^2=1,\ f(x,y)=xy$

(3) 条件 $x^2+3y^2=3,\ f(x,y)=x^2+y^2$

(4) 条件 $x^2-3y^2=1,\ f(x,y)=x^2+xy+y^2x+y$

(5) 条件 $x^2-y^2=1,\ f(x,y)=xy$

例題-7-2. [円盤上の極値問題]

次の関数 $f(x,y)$ の $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$ における最大最小を求めよ.

(1) $f(x,y)=xy$

(2) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$

(4) $f(x,y)=x^2+y^3+2x+3y$

宿題-7-1. [ラグランジュの未定乗数法]
条件 $g(x,y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0$ のもとで、$f(x,y) = x^3 + y$ の極値（極大、極小）を以下のようにして調べよ．

(1) ラグランジュの未定乗数法により $g(x,y) = 0$ を満たす (x,y) において、$f(x,y)$ が臨界点となる点 (a,b) を全て求めよ．

(2) (1) の各点 (a,b) において $g(x,y) = 0$ に陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、$\varphi'(x), \varphi''(x)$ の値を求めよ．

(3) この条件のもとで、(1) における各点 (a,b) は $g(x,y) = 0$ に制限された関数 $f(x,y)$ の極値であるかどうか判定せよ．

宿題-7-2. [最大最小問題]
$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$ の $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ での最大値と最小値を求めよ．
(Hint :円の内部における極値と周上における極値を別々に求めて比較せよ．)

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：http://motochans.blogspot.jp/
（授業内容など．宿題のヒントを書くことも...）
twitter：(https://twitter.com/BasicMathIIB)
アドレスはプリント 1 ページ目上部．手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます．
困ったときは：質問など随時受け付けます．まずはメールにて．