

第8回 ('14年12月12日 : Keywords ... ジョルダン外測度、重積分、累次積分)

定義および定理.

8-1. 長方形上の積分. ... L を $[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ なる長方形上の領域とする. このとき、 $\mu(L) = (a - b) \times (c - d)$ と定義する.

8-2. ジョルダン可測集合. ... $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界な部分集合とする.

$$\chi_A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A \\ 0 & (x, y) \notin A \end{cases}$$

I を有界区間として、 $A \subset I$ としたとき、 $\chi_A(x, y)$ が積分可能であるとき、 A はジョルダンの意味で可測であるという. その積分の値を $\mu(A)$ とかく.

8-3. 内測度、外測度. ... A を有界集合とし、 $A \subset L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ なる長方形領域 $\{L_j\}$ による被覆をとる. このとき、このような長方形領域の被覆全体の下限

$$\bar{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n \mu(L_j) \mid \{L_j\} \right\}$$

つまり、 $\chi_A(x, y)$ の上積分をジョルダン外測度という. おなじように、 $\chi_A(x, y)$ の下積分をジョルダン内測度といい、 $\mu(A)$ とかく.

特に、 $\bar{\mu}(A) = \mu(\bar{A})$ であることと、 A が可測であることは同値である.

8-4. 外測度 0. ... 有界集合 A がジョルダン外測度 0 であれば、 A は可測であり、 $\mu(A) = 0$ である.

8-5. 変数変換. ... φ を $\mathbb{R}$ 内の領域 D を $\varphi(D)$ に一对一に写すとき、 $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ とする. このとき、

$$\int \int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int \int_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

φ によって一点に写された写された集合がジョルダン外測度 0 集合であってもこの公式は成り立つ.

例: $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ なる極座標に対しては、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすると、ヤコビ行列は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ であるから

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

などとなる.

8-6. アフィン変換. ... 変数変換において、 $x = au + bv + e, y = cu + dv + f$ なる一次式と定数項をもつ変換のことである. 3変数の場合も同じである. この変換によるヤコビアンは $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = ab - cd$ となる.

今日の課題.

1. ジョルダン外測度.
 2. 積分の計算ができるようになること.
 3. 変数変換の公式
-

例題-8-1. [ジョルダン外測度]

次の集合は、ジョルダン外測度が0であることを示すことで、特に可測であり、面積0であることを示せ。

(1) 一点はジョルダン外測度0であることを示せ。

(2) $[a, b] \times [c, d]$ の境界

例題-8-2. [長方形型の領域上の積分]

D を下のような領域のとき、関数 $z = f(x, y)$ を D 上で積分せよ。

(1) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = x^2 + y^2$

(2) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = (x + 2y)^2$

(3) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = \frac{y^2}{1+x}$

(4) $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(5) $D = [1, 3] \times [0, 2], f(x, y) = \frac{1}{(1+x+y)^2}$

例題-8-3. [三角形領域の積分]

D を下の点を頂点とする三角形領域のとき、関数 $z = f(x, y)$ を D 上で積分せよ。

(1) $(0, 0), (1, 0), (0, 2), f(x, y) = x^2 - xy - y^2$

(2) $(0, 0), (1, 1), (1, 0), f(x, y) = x^2 + y^2$

次の積分を計算せよ。

(1) $\int_D \int_D x^2 dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$

(2) $\int_D \int_D x dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x\}$

例題-8-4. [積分の順序]

次の積分の順序を交換せよ。

(1) $\int_0^3 \int_{y-3}^{2y} f(x, y) dx dy$

(2) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dx dy$

(3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dx dy$

例題-8-5. [アフィン変換による変換]

アフィン変換により、以下の積分を計算せよ。

(1) $\int_D \int_D (x - y) e^{x+y} dx dy, D = \{(x, y) | 0 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x - y \leq 2\}$

(2) $\int_D \int_D x^2 dx dy, D = \left\{(x, y) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$

宿題-8-1. [面積0]

数直線上の点集合 $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ は面積0であることを示せ。

宿題-8-2. [積分]

次の積分を計算せよ。

$$\int_D \int_D (x - 2y)^2 dx dy, D = \{(x, y) \mid |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$$

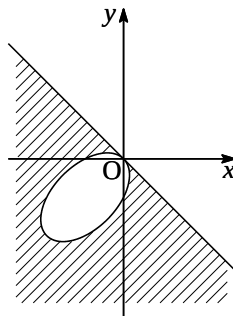
宿題-8-3. [空間の極座標]

空間の極座標を $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ とし、以下の問題に答えよ。

- (1) 空間の位置を表すのに r, θ, φ はどのような範囲であればよいか？
- (2) この変換によるヤコビアンを求めよ。
- (3) 次の積分を求めよ。 $\int \int \int_D (x+y) dx dy dz, D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

宿題-4-2(2) のこたえ

$(0,0)$ では極値ではない。 $y = 0$ において、 $(0,0)$ で x が正の値で近づいていくと、正で 0 に向かう。一方、 $f(x,y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2 + x + y)$ はなので、下の領域の写真の部分で近づくと、負の値で近づく。ゆえに、原点の任意の近くで、正の数と負の数が見れるので極値ではない。



宿題-6-1(1) のこたえ

n 一般で行う。 $A = (x_{ij})$ とする。 $g(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \det(A) - 1$ とする。このとき、ある x_{ij} が存在して、 A_0 の十分小さい近傍において $SL(n, \mathbb{R})$ が $\mathbb{R}^{n^2-1}$ からの関数として掛けるためには、 $g_{x_{ij}}(A) \neq 0$ であればよい。今、 $g(x_{11}, \dots, x_{nn})$ は x_{ij} に関して是一次式である。 $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$ であるとする、 A_0 の全ての小 $n-1$ 行列式が 0 になることはない。なぜなら、もしそうなら、 $\text{rank}(A_0) \leq n-1$ であるからである。ゆえに、 A_0 の (ij) 小行列式を A_{ij} とすると、 A の展開公式より、

$$g(x_{11}, \dots, x_{nn}) = (-1)^{i+1} x_{ij} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} x_{ij} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} x_{ij} |A_{in}|$$

より、 $g_{x_{ij}}(x_{11}, \dots, x_{nn}) = (-1)^{i+j} |A_{ji}| \neq 0$ となる。ゆえに、上の条件が満たされた。

宿題 6-3 の略解。(ここでは簡単のため $r = 0$ のときは考えないことにする。)

(1) $r > 0$ なので、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ として考える。 $r \neq 0$ とすると、

$G_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, G_\theta = F_x(-r \sin \theta) + F_y r \cos \theta$ であるから、 $F_x = G_r \cos \theta - G_\theta \frac{\sin \theta}{r}, F_y = G_r \sin \theta + G_\theta \frac{\cos \theta}{r}$ となる。(2) $F_x = F_y = 0$ となる点が特異点。上の関係式より、 $G_r = G_\theta = 0$ となる点と同じである。 $G_r = 1$ だからそのような点は存在しない。よって全ての点が正則点である。そのような点を (x_0, y_0) とすると、 $F_x(x-x_0) + F_y(y-y_0) = 0$ が接線となる。 $r = \sin 2\theta$ などを使い、この式をあとはまとめればよい。(3) $F_y = 0$ かつ $G(r, \theta) = 0$ となる点を求め、それ以外の点で陰関数 $y = \varphi(x)$ は存在する。そのような点は2箇所存在する。計算してみよ。

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : <http://motochans.blogspot.jp/>

(授業内容など、宿題のヒントを書くことも...)

twitter : (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

アドレスはプリント1ページ目上部。手習い塾：水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます。

困ったときは：質問など随時受け付けます。まずはメールにて。