

微積分II演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回 ('14年12月19日 : Keywords ... 広義リーマン積分、積分と微分の順序交換)

定義および定理.

9-1. 広義リーマン積分. ... D を有界とは限らない $\mathbb{R}^2$ 内の領域とする. $\{D_n\}$ を D の有界閉領域の増大列であり、 $D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$ とする. このような任意の増大列に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{D_n} f(x,y) dx dy$ が存在し同じ値に収束するなら、その値を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{D_n} f(x,y) dx dy = \int \int_D f(x,y) dx dy$$

として定義する. このとき、 $f(x,y)$ は D において積分可能という.

また、 $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ に対して、 $g(x,y)$ が D 上で積分可能とすると、 $f(x,y)$ も D 上で積分可能である.

$g(x,y) \geq 0$ となる関数の広義積分では、ある増大列 $D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$ が存在して $\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{D_n} f(x,y) dx dy$ が収束するなら $g(x,y)$ は D 上で積分可能である.

9-2. パラメータを含む積分の微分. ... $f(x,y)$ は y に関して偏微分可能であり、 $f_y(x,y)$ は x,y の両方に関して連続であるとする. このとき、

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b f_y(x,y) dx$$

が成り立つ. つまり、積分と微分の順序の交換ができる.

今日の課題.

1. 広義重積分の計算ができるようになること.
2. パラメータのある関数の積分の微分.

例題-9-1. [広義重積分]

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int \int_{x \geq 0, y \geq 0} e^{-x-y} dx dy \quad (2) \int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$(3) \int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (4) \int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \quad D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$(5) \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$(6) \int \int_D \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$(7) \int \int_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad D = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

例題-9-2. [パラメータのある関数の積分]

次の積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x) dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a \cos^2 x + b \sin^2 x)^2}$$

$$(3) \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\log x} dx$$

例題-9-3. [球の体積]

以下の球体の体積を求めよ.

$$(1) \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

$$(2) \{(x, y, z, w) | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2\}$$

$$(3) \{(x, y, z, w, u) | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + u^2 \leq r^2\}$$

宿題-9-1. [パラメータのある関数の積分の微分]

パラメータを含む積分の微分において、 a, b が y の関数 $a(y), b(y)$ であるとする. このとき、下を示せ.

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = f(b, y) \frac{db}{dy} - f(a, y) \frac{da}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial a} dx$$

宿題-9-2. [積分]

広義積分 $\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$ を計算することにより、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

の値を求めよ.

宿題-9-3. [空間の極座標]

次の広義重積分を計算せよ. ただし、 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ とする.

$$\int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ただし、必要があれば、 $\operatorname{Arcsinh}(z) = \log(z + \sqrt{1+z^2})$ などの等式を用いてもよい.

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2014jugyo/biseki14.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : <http://motochans.blogspot.jp/>

(授業内容など. 宿題のヒントを書くことも...)

twitter : (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

アドレスはプリント1ページ目上部. 手習い塾: 水曜 5,6 限 1E403 にて質問を受け付けます.

困ったときは: 質問など随時受け付けます. まずはメールにて.